Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

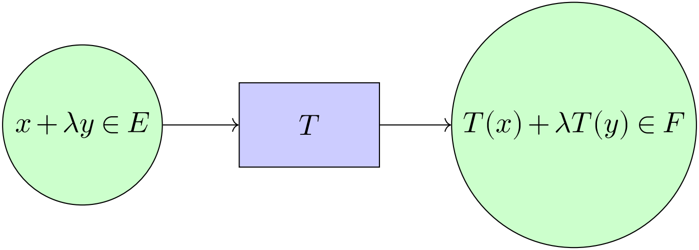
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

Περιεχόμενα

Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

Ορισμός

Αν E, F είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε $\mathcal{L}(E, F)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$. Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{L}(E)$ αντί για $\mathcal{L}(E, E)$.



Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F ορίζει ισομορφισμούς $V : E \to \mathbb{K}^m$, $W : F \to \mathbb{K}^n$, οπότε ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F.$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \left\langle \tilde{T}_A e_k, f_i \right\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Πίνακες και Τελεστές

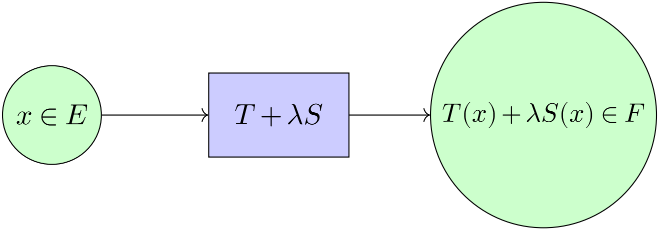
- Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα $A_T = [a_{ik}]$ από την σχέση $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$.

Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(E, F)$

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{L}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.



Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F) : A \mapsto T_A$ είναι 1-1, επί, γραμμική.

Πίνακες και Τελεστές

Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, η απεικόνιση $T \to \langle Te_k, f_i \rangle$ είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο $\mathcal{L}(E, F)$ επί του γραμμ. χώρου $M_{nm}(\mathbb{K})$.
Όταν $n = m$, απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικότερα όταν ορίζεται η σύνθεση).

Σύνθεση $\rightsquigarrow$ γινόμενο πινάκων: Αν επίσης ένας G έχει ορθοκανονική βάση $\{g_1, \dots, g_k\}$, και $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ είναι γραμμικές με
$T \rightsquigarrow [a_{ij}] \in M_{nm}$ και $S \rightsquigarrow [b_{ij}] \in M_{mk}$ τότε
$ST := S \circ T \rightsquigarrow [c_{ij}] \in M_{nk}$ όπου $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$.

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$.
Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x \rangle = \langle y, T_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.
Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1\rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } \ x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα $A := A_T$. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1\rangle = \langle x_2, T x_1\rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \ \ (TR)^* = R^* T^*, \ \ T^{**} = T.$$

Τελεστές πρώτης τάξης

Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Άσκηση

• Ο συζυγής: $(vu^*)^* = uv^*$

• Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0;

• Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^{N} s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}$, $u_k \in E, v_k \in F$.

• Μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \dots, u_N\}$ ορθοκανονική βάση στον E, ή την $\{v_1, \dots, v_N\}$ ορθοκανονική βάση στον F.

• Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές βάσεις;

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

$$\|Tx - Tx'\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \overset{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \, \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,
φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T *είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \to F \quad \text{δηλ. } \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Παράδειγμα

$D = c_{oo} \subseteq \ell^2, \ F = \ell^2$
Αν $a = (a(n))$ με κάθε $a(n) \in \mathbb{K}$, ορίζω

$$T : e_n \mapsto a(n)e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T\left(\sum_n \langle x, e_n \rangle e_n\right) := \sum_n \langle x, e_n \rangle a(n)e_n$$

$$\text{δηλ.} \quad T((x(n)) := (a(n)x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{oo}.$$

Παράδειγμα

$D = c_{oo} \subseteq \ell^2, \; F = \ell^2$
Αν $a = (a(n))$ με κάθε $a(n) \in \mathbb{K}$, ορίζω

$$T : e_n \mapsto a(n) e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T\left(\sum_n \langle x, e_n \rangle e_n\right) := \sum_n \langle x, e_n \rangle a(n) e_n$$

$$\text{δηλ.} \quad T((x(n)) := (a(n)x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{oo}\,.$$

Επεκτείνεται σε $\tilde{T} : \ell^2 \to \ell^2$ αν-ν η $(a(n))$ είναι φραγμένη, και

$$\|T\| = \sup_n |a(n)|\,.$$

Παράδειγμα

$D = c_{oo} \subseteq \ell^2, \; F = \ell^2$
Αν $a = (a(n))$ με κάθε $a(n) \in \mathbb{K}$, ορίζω

$$T : e_n \mapsto a(n)e_n \quad n \in \mathbb{N}$$

και επεκτείνω γραμμικά:

$$T\left(\sum_n \langle x, e_n\rangle e_n\right) := \sum_n \langle x, e_n\rangle a(n)e_n$$

$$\text{δηλ.} \quad T((x(n)) := (a(n)x(n)), \quad x = (x(n)) \in c_{oo}\,.$$

Επεκτείνεται σε $\tilde{T} : \ell^2 \to \ell^2$ αν-ν η $(a(n))$ είναι φραγμένη, και

$$\|T\| = \sup_n |a(n)|\,.$$

Μάλιστα αν η $(a(n))$ δεν είναι φραγμένη, υπάρχει $y = (y(n)) \in \ell^2$ ώστε $(a(n)y(n)) \notin \ell^2$.

$a = (a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ $a(n) \in \mathbb{K}$

$\forall y = (y(n)) \in \ell^2$ ορίζω

$$Ty = (a(n)y(n))_{n=1}^{\infty} \overset{?}{\in} \ell^2$$

Εύκολο : ΝΑΙ $\forall y \in \ell^2 \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} |a(n)| < +\infty$

$$\Updownarrow$$

αν a όχι φραγμ. $\Rightarrow \exists\, y \in \ell^2$ ώστε $Ty \notin \ell^2$

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο E έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής.

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο E έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής.
Πράγματι, επιλέγοντας ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E βρίσκουμε

$$\|Tx\|_F \le \left(\sum_{k=1}^{m} \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2} \|x\|_E \quad \forall x \in E\,.$$

$$\forall x = \sum_{u=1}^{m} \langle x, e_u \rangle e_u \in E, \quad \forall y \in F$$

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 = \left|\left\langle T\left(\sum x(u)\, e_u\right), y \right\rangle\right|^2 = \left|\sum_{u=1}^{m} x(u) \langle Te_u, y\rangle\right|^2$$

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \overset{CS}{\le} \underbrace{\left(\sum_{u=1}^{m} |x(u)|^2\right)}_{\|x\|_E^2} \left(\sum_{u=1}^{m} |\langle Te_u, y\rangle|^2\right)$$

Parseval

$$\le \|x\|_E^2 \left(\sum_{u=1}^{m} \|Te_u\|^2 \|y\|^2\right)$$

$$|\langle Tx, y\rangle| \le \|x\|_E \|y\| \left(\sum_u \|Te_u\|^2\right)^{1/2}$$

Θέτω $y = Tx$

$$\|Tx\|^{\cancel{2}} = \langle Tx, Tx \rangle \le \|x\| \, \cancel{\|Tx\|} \left(\sum_u \|Te_u\|^2 \right)^{1/2}$$

Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και ο E έχει πεπερασμένη διάσταση, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής.

Πράγματι, επιλέγοντας ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E βρίσκουμε

$$\|Tx\|_F \leq \left(\sum_{k=1}^{m} \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2} \|x\|_E \quad \forall x \in E.$$

Τ φραγμ. και μάλιστα $\underbrace{\|T\| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} \|Te_k\|_F^2 \right)^{1/2}}$

Όμως, αν ο E έχει άπειρη διάσταση, υπάρχουν ασυνεχείς γραμμικές απεικονίσεις $T : E \to F$, ακόμα κι αν $\dim F = 1$.

<u>Πρόβ.</u> <u>ασυνεχών</u> γραμμ. απεικ. στα $\dim E = +\infty$, $\dim F = 1$

(1) $T : (c_{00}, \| \, \|_2) \longrightarrow (\mathbb{K}, | \, |)$ γραμμική ασυνεχής;

T συνεχής $\Longleftrightarrow$ επεκτείνεται σε $\overline{c_{00}}^{\| \, \|_2} = \ell^2$

$\tilde{T} : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμ. + συνεχής προέρχεται από εσωτ. γινόμ.

(Θ. Riesz) δηλ. $\exists\, y \in \ell^2$ ώστε $\tilde{T}(x) = \langle x, y\rangle \quad \forall x \in \ell^2$

αρκεί να ισχύει :

$$T : c_{00} \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$T(x) = \text{“}\langle x, y\rangle\text{”} = \sum_{n=1}^{n_x} x(n)\overline{y(n)} \quad \forall x \in c_{00}$$

όπου να ισχύει $y = (y(n)) \notin \ell^2$

- πχ $y(n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  τότε : $T(x) = \sum_{n=1}^{n_x} x(n) \quad \forall x \in c_{00}$

  δεν υπάρχει γιατί $x \in \ell^2$ δεν $\sum_{n=1}^{\infty} x(n) \in \mathbb{K}$ όχι πάντα πχ $x(n) = \frac{1}{n}$

- πχ $y'(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  τότε $T'(x) = \sum_{n=1}^{n_x} n\, x(n)$ ”

πχ $\forall k,\ T'(e_k) = k$ τότε ασυνεχής γιατί $\forall k$

$$\left\| \frac{e_k}{k} \right\|_2 = \frac{1}{k} \to 0 \text{ ενώ } \left\| T'(e_k) \right\|_2 = 1 \not\to 0$$

Παρατήρηση $\forall$ χώρο $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ $\dim E = \infty$ (πλήρης ή όχι)

τότε $\exists\, T : E \to \mathbb{K}$ γραμμική και ασυνεχής.

Απόδ. $\dim E = \infty$, $\exists$ άπειρη ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ $\boxed{\text{ZORN}}$

άρα γραμμ. ανεξ.

Την επεκτείνω σε αλγεβρική βάση του χώρου E (Πώς;)

έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\alpha : \alpha \in A\} =: \mathcal{B}$ αλγεβρική βάση του E

Άρα, $\forall x \in E$ ανήκει $x \in \operatorname{span} \mathcal{B}$

δηλ. $\exists\, \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{K}$ και $\mu_1 \dots \mu_k \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n x_n + \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_{\alpha_j} \quad (\text{μοναδικά } \lambda, \mu)$$

ορίζω $T(x) = \sum_{n=1}^{k} n \lambda_n + 0 \in \mathbb{K}$ καλά ορισμένη γραμμική

τότε $T(x_n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

άρα $T\left(\frac{x_n}{n}\right) = 1 \quad \forall n$ άρα $T\left(\frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

ενώ $\left\| \frac{x_n}{n} \right\|_E = \frac{1}{n} \to 0$

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, x \in H_2.$$

όπου $H_1 = \operatorname{span}\{e_1 \dots e_m\}$, $H_2 = \operatorname{span}\{f_1 \dots f_n\}$ πεπερ. ο.κ. βάσεις

$\forall\, T \in B(H_1, H_2)$ αντιστοιχεί $A \in M_{nm}(\mathbb{K})$: $A = [a_{ik}]$

$\to a_{ik} = \langle T e_k, f_i \rangle$ Θέτουμε $B \in M_{mn}(\mathbb{K})$ $B = A^*$ δηλ. $B = [b_{ik}]$ όπου

$b_{ik} = \overline{a_{ki}}$ οπότε ο αντίστοιχη τελεστής $T_B : H_2 \to H_1$ ικανοποιεί

$$\langle T_B f_j, e_i \rangle = b_{ij} = \overline{a_{ji}} = \overline{\langle T e_i, f_j \rangle} = \langle f_j, T e_i \rangle \quad \forall i, j$$

$\forall y \in H_2, \ \forall x \in H_1$

$\langle T_B y, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$

άρα υπάρχει ο $T^* = T_B$

Σε απειροδιάστατους χώρους, χρειαζόμαστε ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* y, x\rangle_{H_1} = \langle y, Tx\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, \overset{y}{\cancel{x}} \in H_2.$$

Απόδ. Έστω $y \in H_2$. Να βρω $T^*y \in H_1$ ώστε να ισχύει

$$\langle x, T^*y\rangle_{H_1} \overset{(*)}{=} \langle Tx, y\rangle_{H_2} \quad \forall x \in H_1$$

Κοιτάω την $f_y : H_1 \longrightarrow \mathbb{K}$

$$x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$$

$$f_y : x \xrightarrow[\text{συνεχ.}]{T} Tx \xrightarrow[\text{συνεχής}]{\langle \cdot, y\rangle} \langle Tx, y\rangle$$

σύνθεση γραμμ. απεικ. $\Rightarrow$ γραμμ.

σύνθεση συνεχών $\Rightarrow$ συνεχής

f_y είναι μια συνεχής γραμμ. μορφή στο χώρο HILBERT H_1 (πλήρης)

$\Longrightarrow$ από το Θ. Riesz $\exists!\, x_y \in H_1$ ώστε

$$f_y(x) = \langle x, x_y \rangle \quad \forall x \in H_1$$

δηλ. $\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, x_y \rangle_{H_1}$

θέτω το $T^* y = x_y$

$\forall y \in H_2$ βρίσκω μοναδικό $x_y \in H_1$ άρα έχω ορίσει καλά την απεικόνιση

$$T^*: H_2 \longrightarrow H_1 : y \longmapsto x_y$$

ώστε $\langle Tx, y \rangle = f_y(x) = \langle x, T^* y \rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$

Τα υπόλοιπα είναι!

✓ • T^* γραμμ.: $y_1, y_2 \in H_2$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\quad T^*(y_1 + \lambda y_2) \overset{?}{=} T^* y_1 + \lambda T^* y_2$

$\forall x \in H_1$

$$\langle T^*(y_1 + \lambda y_2), x \rangle \overset{\text{ορ } T^*}{=} \langle (y_1 + \lambda y_2), Tx \rangle$$

$$= \langle y_1, Tx \rangle + \lambda \langle y_2, Tx \rangle$$

$$\overset{\text{ορ } T^*}{=} \langle T^* y_1, x \rangle + \lambda \langle T^* y_2, x \rangle$$

$$= \langle T^* y_1 + \lambda T^* y_2, x \rangle \quad \forall x \in H_1 \Longrightarrow$$

$$|\langle x, T^*y\rangle| = |\langle Tx, y\rangle| \le \|Tx\| \, \|y\| \le \|T\| \, \|x\| \, \|y\|$$

$\forall x \in H_1, \ \forall y \in H_2$

Οπότε, $\|T^*y\|_{H_1} = \sup\{ |\langle T^*y, x\rangle| : x \in ball(H_1) \}$

$$\le \|T\| \, \|y\|_{H_2} \quad \forall y \in H_2$$

άρα ο T^* είναι φραγμ. και $\|T^*\| \le \|T\|$

<u>προφ</u> Ομοίως (αλλ. ανάποδα) $\forall x \in H_1$

$$\|Tx\|_{H_2} = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : y \in ball(H_2) \}$$

$$= \sup\{ |\langle x, T^*y\rangle| \quad \text{''} \quad \}$$

$$\le \sup\{ \|x\| \, \|T^*\| \, \|y\| \quad \text{''} \quad \}$$

$$= \|x\| \, \|T^*\|$$

$\Longrightarrow \|T\| \le \|T^*\|$ άρα ισότητα

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 *είναι δύο χώροι* *Hilbert* *και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας* *φραγμένος* *τελεστής, τότε* *υπάρχει* *ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* y, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, \overset{y}{\cancel{x}} \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ *ονομάζεται* *ο συζυγής (adjoint)* *του* T. *Είναι φραγμένος τελεστής και* $\|T^*\| = \|T\|$.

Μοναδικότητα: Αν $\exists\, S : H_2 \to H_1$ γραμμ. ώστε

$$\langle Sy, x \rangle_{H_1} = \langle y, Tx \rangle_{H_2} \quad \forall\, x \in H_1, y \in H_2$$

$$\parallel$$

$$\langle T^* y, x \rangle_{H_1}$$

άρα $\langle \underbrace{Sy - T^* y}_{\in H_1}, x \rangle = 0 \quad \forall x \in H_1 \Rightarrow Sy - T^* y = 0 \quad \forall y \in H_2$

οπότε $S = T^*$

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* y, x\rangle_{H_1} = \langle y, Tx\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, x \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

γρ χώρος με $\| \ \|$

$\mathcal{B}(H_1, H_2) \ni T \longrightarrow T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

$(T+S)^* = T^* + S^*$ διότι $\langle (T+S)^* y, x\rangle = \langle y, (T+S)x\rangle \quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_2$

$\langle T^*y + S^*y, x\rangle = \langle y, Tx + Sx\rangle$

$\langle T^*y, x\rangle + \langle S^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle y, Sx\rangle$

$\langle (\lambda S)^* y, x\rangle = \langle y, (\lambda S)x\rangle = \bar{\lambda}\langle y, Sx\rangle = \bar{\lambda}\langle S^* y, x\rangle = \langle \bar{\lambda} S^* y, x\rangle \quad \forall x \in H_1 \ \forall y \in H_2$

άρα $(\lambda S)^* y = \bar{\lambda} S^* y \quad \forall y \in H_2$

άρα $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$

Σημ $T, S \in \mathcal{B}(E, F)$ χώροι με εσωτ. γινόμενο

και $T = S$ ανν $\forall x \in E, \forall y \in F \quad \langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle$

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

$T : H_1 \to H_2$

$S = T^* : H_2 \to H_1$

$S^* = T^{**} : H_1 \to H_2$!

$\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$

$\langle S^* x, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$

$= \langle x, T^* y \rangle$

$= \langle Tx, y \rangle$

άρα $S^* = T$

δηλ. $T^{**} = T$

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$. ✓

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) Αν $H_1 \overset{S}{\to} H_2 \overset{T}{\to} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $\underline{(TS)^* = S^*T^*}$. σα

$TS : H_1 \longrightarrow H_3$ $\quad z \in H_3, x \in H_1$

$$\langle (TS)^* z, x \rangle_{H_1} \overset{\text{op}}{=} \langle z, (TS)x \rangle_{H_3} = \langle z, T(Sx) \rangle_{H_3}$$

$$\overset{\text{op}}{=} \langle (T^* z), Sx \rangle_{H_2}$$

$$\overset{\text{op}}{=} \langle S^*(T^* z), x \rangle_{H_1}$$

$$= \langle S^* T^* (z), x \rangle \quad \forall x \in H_1, \forall z \in H_3$$

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^*T^*$.

(ε) $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Ιδιότητα C^* !

$\forall x \in H_1$,

$$\|T^*Tx\|_{H_1} = \|T^*(Tx)\| \le \|T^*\| \, \|Tx\|_{H_2} \le \|T^*\| \, \|T\| \, \|x\| = \|T\|^2 \|x\|$$

Παίρνω sup ως προς $x \in ball(H_1)$

$$\|T^*T\| \le \|T\|^2$$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle \overset{\text{ορ}}{=} |\langle T^*(Tx), x \rangle| \le \|T^*Tx\| \, \|x\| \le \|T^*T\| \, \|x\| \, \|x\|$$

$\xrightarrow{\text{sup ως προς x}}$ $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*

(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.

(β) $T^{**} = T$.

(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.

(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.

(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$), $\quad (\mathcal{B}(H), +, \circ, *, \| \ \|)$

η $T \to T^* : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Άλλο πρότ. ~~C~~ $(C([0,1]), \| \ \|_\infty)$: πλήρης γραμμ. χώρος με νόρμα

. $f, g \in C([0,1])$, $(fg)(t) = f(t)g(t)$! $fg \in C([0,1])$: + δακτύλιος (με) άλγεβρα

$\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ Ορίζεται! $\forall f \in C[0,1]$

$f^* \in C([0,1])$ με $f^*(t) = \overline{f(t)}$ $\forall t \in [0,1]$

η $f \mapsto f^*$ είναι μια ενέλιξη και ικανοποιεί

$$\|f^* f\|_\infty = \sup\{\, |f^*(t) f(t)| : t \in [0,1] \,\}$$
$$= \sup\{\, |f(t)|^2 \quad ,, \,\} = \|f\|_\infty^2$$

$(C([0,1]), +, \cdot, {}^*, \|\ \|_\infty)$ είναι C^*-άλγεβρα

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο με E πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

Αν $[a_{ik}]$ είναι ένας $\infty \times \infty$ πίνακας με $a_{ik} \in \mathbb{K}$, πότε υπάρχει (φραγμ.?) γραμμ. τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i\rangle$

Όχι πάντα! Μια αναγκαία συνθήκη είναι οι στήλες του πίνακα $\{\langle Te_k, e_i\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ να ανήκουν στο ℓ^2 $\forall i$ δηλ. $\sum_k |a_{ik}|^2 < +\infty$ $\forall i$

το ίδιο οι γραμμές. Αρκεί?

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n),\ \ a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$

αντιστοιχεί σε πίνακα $[b_{ik}]$ όπου $b_{ik} = a_k \delta_{ik}$

$$x = \sum x(n) e_n \qquad \begin{bmatrix} c_1 & & 0 \\ & c_2 & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix}$$

φραγμένος αν-ν $\Longleftrightarrow \|a\|_\infty = \sup_n |c_n| < \infty$

$$D_a(x) = \sum a_n x(n) e_n$$

$$\|D_a(x)\|_2^2 = \sum |a_n x(n)|^2 \le \sup|a_n|^2 \sum |x(n)|^2$$

άρα $\|D_a x\|_2 \le \|a\|_\infty \|x\|_2$ και $\|D_a\| \le \|a\|_\infty$

επίσης $D_a(e_n) = a_n e_n$ και

$\|D_a\| \ge \|D_a e_n\|_2 = \|a_n e_n\|_2 = |a_n|$ $\forall n$

$\Rightarrow \|D_a\| \ge \|a\|$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

Απόδ $\langle D_a^* x, y \rangle = \langle x, D_a y \rangle$

άρα $\langle D_a^*(e_k), e_i \rangle = \langle e_k, D_a e_i \rangle = \langle e_k, a_i e_i \rangle$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq i \\ \overline{a_i} & \end{cases}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n), \;\; a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

• Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η

$$\sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |a_{ik}|^2 < \infty$$

Απόδ $\forall x \in \ell^2, y \in \ell^2$

$$\langle Tx, y \rangle = \langle T(\sum^\infty x(k)e_k), y \rangle \overset{\text{γιο}}{=} \langle \sum_k^\infty x(k)T(e_k), y \rangle$$

συνέχεια του T

$$= \sum_{k=1}^\infty x(k) \langle Te_k, y \rangle$$

$$|\langle Tx, y\rangle|^2 \le \left(\sum_k |x(k)|^2\right)\left(\sum |\langle Te_k, y\rangle|^2\right)$$

$$\le \|x\|_2^2 \left(\sum_k \|Te_k\|^2 \|y\|^2\right)$$

$$= \|x\|^2 \|y\|^2 \left(\sum_k \|Te_k\|^2\right)$$

Θέτω $y = Tx$

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle \le \|x\| \, \|Tx\| \left(\sum_k \|Te_k\|^2\right)^{1/2}$$

άρα $\|Tx\| \le \left(\sum_k \|Te_k\|^2\right)^{1/2} \|x\| \quad \forall x$

όμως από την υπόθεση η σειρά $\sum_k \|Te_k\|^2 < +\infty$

απόδ $\|Te_k\|^2 \overset{?}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_i\rangle|^2$

(Parseval: $\forall y \in \ell^2$ έχω $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle y, e_i\rangle|^2$)

και $\forall k \in \mathbb{N}$ $\|Te_k\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ik}|^2$

άρα $\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 = \sum_k^{\infty} \sum_i^{\infty} |a_{ik}|^2 \overset{\text{υπόθ}}{<} +\infty$

Δείξαμε ότι T φραγμένο και μάλιστα

$$\|T\| \le \left(\sum_{i,k} |\langle Te_k, e_i\rangle|^2\right)^{1/2}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

- Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i \rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{για κάθε } x \in \ell^2 .$$

" $(Tx)(s) = \int a(s,t)x(t)\,dt$ "

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b]\times[a,b])$, ορίζουμε

$$\underline{(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy}, \quad f \in C([a,b]).$$

∫μα Riemann

$y \mapsto k(x,y) f(y)$ συνεχής

άρα ∫σιμη

Άραγε η συνάρτηση $[a,b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (T_k^o f)(x)$ είναι συνεχής

$x_n \to x$ τότε $\int_a^b k(x_n,y) f(y) dy \to \int_a^b k(x,y) f(y) dy$

ναι;

διότι $k(x_n,y) \to k(x,y)$ ομοιόμορφα ως προς y

άρα το ∫ περνάει στο ∫

άρα ορίζεται $T_k^o : C([a,b]) \longrightarrow C([a,b])$

προφανώς η T_u^0 είναι γραμμική
(από τη γραμμικότητα του $\int$)

Να εξετάσω αν επεκτείνεται σε $T_u : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$

Εξ ορισμού (ως χώρος) ο $L^2([a,b])$ είναι η πλήρωση
του $(C([a,b]), \| \ \|_2)$

T_u^0 επεκτείνεται $\iff$ είναι συνεχής ως προς $\| \ \|_2$

δηλ. αρκεί ν.δ.ο. $\exists M$ ώστε $\forall f \in C([a,b])$

$$\|T_u^0 f\|_2 \leq M \|f\|_2$$

$$\int_a^b |(T_u^0 f)(x)|^2 dx \quad ?$$

$$|(T_u^0 f)(x)|^2 = \left| \int_a^b k(x,y) f(y)\, dy \right|^2$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 dy \right) \underbrace{\left(\int_a^b |f(y)|^2 dy \right)}_{\|f\|_2^2}$$

$$|(T_u^o f)(x)|^2 \le \|f\|_2^2 \int_a^b |k(x,y)|^2 dy \quad \forall x \in [a,b]$$

$\int$:

$$\int_a^b |(T_u^o f)(x)|^2 dx \le \|f\|_2^2 \int_a^b \underbrace{\left(\int_a^b |k(x,y)|^2 dy \right)}_{\text{υπάρχει [illegible], διότι}} dx$$

υπάρχει [illegible], διότι $(x,y) \to k(x,y)$ είναι συνεχής άρα R-$\int$σιμη στο $[a,b]\times[a,b]$ (Ανάλυση III)

Όμως $\displaystyle\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 dy\, dx = \|k\|_{22}^2$

Έχω δείξει ότι

$$\|(T_u^o f)\|_2 \le \|k\|_{22} \|f\|_2$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a,b]), \|\cdot\|_2) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x,y)|^2 dxdy$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a,b]), \|\cdot\|_2) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x,y)|^2 dx dy$.
Άρα επεκτείνεται σε $T_k : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$.

Σχόλιο: Ο T_k ορίζεται ↑ και όταν $k \in L^2([a,b]\times[a,b])$
([illegible])

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε
$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$
(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και
$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και
$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).
Ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον

$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.
Ο συζυγής του U είναι ο V. Άρα $UU^* = U^*U = I$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } \ Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} &Ue_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } &Ve_n := e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες,

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } \; Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \quad (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } \; Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } \; Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $T = S^*$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } \; Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } \; Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $T = S^*$.
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned}
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}): \ Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\
U^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+): \ Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ \ (n \in \mathbb{Z}_+) \\
S^*e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)}
\end{aligned}$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

$$\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}): \ Ue_n = e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}$$

$$U^*e_n = e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+): \ Se_n = e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned}
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}):\ Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}\\
U^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z})\\
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+):\ Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}\ \ (n \in \mathbb{Z}_+)
\end{aligned}$$

$$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων [1] ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0,1])$ του $L^2([0,1])$,

[1] Δηλ. των $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0,1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων [1] ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0,1])$ του $L^2([0,1])$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2([0,1])$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$ για κάθε $f \in C^1([0,1])$.

---

[1] Δηλ. των $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0,1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.