Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

25 Μαρτίου 2022

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.

Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.

(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ είναι αυτομάτως θετικός.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \ \Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0,1] \ \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \ \Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h \ \ \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$-κλειστός.

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B,\ S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

$A + \|A\| I \geq 0$ $\qquad$ $\|A\| I - A \geq 0$

Αν $A = A^*$ τότε $-\|A\| I \leq A \leq \|A\| I$

άρα $A = (A + \|A\| I) - \|A\| I$ (διαφορά δύο θετικών)

αρ. $\forall\, x \in \mathcal{B}(H)$ σε γραμμ. συνδυασμό 4 θετικών

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

$(\langle B_n\xi, \xi\rangle)_n \nearrow \ \forall \xi \in H \longrightarrow \exists M : \|B_n\| \leq M \ \forall n$

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$. Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$.

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ *υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$. *Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ *μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον* A.

Υπενθύμιση: Αριθμητικά: αν $a \geq 0$ τότε $\exists ! \underset{x}{\sqrt{a}} \geq 0$ τ.ω. $x^2 = a$

«Απόδ»: Μπορώ $a \in [0,1]$
Θέτω $b = 1 - a \in [0,1]$
Ψάχνω $y = 1 - x$ ώστε $x^2 = a$ δηλ. $(1-y)^2 = 1 - b$
$y \in [0,1]$
$$\Updownarrow$$
$$y = \frac{1}{2}(b + y^2)$$

Διαδοχικές προσεγγίσεις (μεθ. Newton – Raphson)
$y_0 = 0$ και ορίζω στην αναδρομική σχέση $y_{n+1} = \frac{1}{2}(b + y_n^2)$

$y_1 = \frac{1}{2} b$
$y_2 = \frac{1}{2}(b + y_1^2) = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{4} b^2\right)$ κ.ο.κ.

Δείχνουμε ότι η αναδρομική ακολουθία (y_n) είναι αύξουσα και φραγμ.

οπότε (ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ του $[0,1]$) $\exists\, y \in [0,1]$ ώστε
$y_n \longrightarrow y$

οπότε: $y = \lim_n y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b + \lim_n y_n^2\right)$

$= \frac{1}{2}(b + y^2)$ οκ

οπότε το $x = 1 - y$ ικανοποιεί

$x^2 = (1-y)^2 = 1 - b = a$ ∎

«Το ΙΔΙΟ» για τελεστές

$A \in B_+(H)$ υπάρχει $X \in B_+(H)$ ώστε $X^2 = A$

· Μπορώ να υποθέσω ότι $\|A\| = 1$ οπότε $0 \le A \le I$

όπως για τους αριθμούς, βολεύει να ορίσω

$B = I - A$ οπότε $0 \le B \le I$

και ψάχνω $Y \in B_+(H)$ ώστε $(I - Y)^2 = (I - B) = A$

$\iff I - 2Y + Y^2 = I - B$

$\iff Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$ (*)

«εξίσωση τελεστών»

ορίζω $Y_0 = 0$

και επαγωγικά ορίζω

$Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B + Y_n^2)$

θέλω να βρω «όριο» Y της (Y_n) και να δείξω

ότι το Y ικανοποιεί την (*)

Θα δείξω ότι η (Y_n) είναι "αύξουσα" $(\langle Y_n\xi,\xi\rangle)_n \nearrow$ $\forall \xi\in H$

και "φραγμένη" : $\|Y_n\|\le 1$

οπότε από την προηγούμενη πρόταση $\exists\, Y\in B(H)$ ώστε

$\forall \xi$: $\exists \lim_n Y_n\xi = Y\xi$

(i) <u>Ισχ.</u> $Y_n \geq 0$ $\forall n$

Επειδή από τα <u>Ισχ.</u> (*) $\forall Y_n$ είναι πολυώνυμο $p_n(B)$ του B με ≥ 0 συντελεστές

$Y_0 = 0$ οκ

$Y_1 = \frac{1}{2}B$ οκ

$Y_2 = \frac{1}{2}(B+Y_1^2) = \frac{1}{2}B + \frac{1}{8}B^2$ οκ

⋮

Αν έχω δείξει ότι Y_n είναι $p_n(B)$ τότε $Y_n^2 = (p_n(B))^2$ είναι πολ. με ≥ 0 συντελ.

$\Rightarrow Y_{n+1} = \frac{1}{2}(B+Y_n^2) = p_{n+1}(B)$ με ≥ 0 συντελ.

οπότε $\forall Y_n$ είναι γραμμ. συνδυασμός δυνάμεων του θετικού B (άρα θετικοί) με ≥ 0 συντελεστές

άρα $Y_n \geq 0$ $\forall n$

(ii) <u>Ισχ.</u> $\|Y_n\| \le 1$

<u>Απόδ.</u> $\|Y_0\| = 0 \le 1$ και αν $\|Y_n\|\le 1$ τότε $\|Y_n^2\| \le \|Y_n\|^2 \le 1$

οπότε $\|Y_{n+1}\| \le \frac{1}{2}(\|B\| + \|Y_n^2\|) \le 1$

(iii) (Y_n) είναι "αύξουσα" ΘΔΩ: $\forall n$, $Y_{n+1} - Y_n \geq 0$

θα δείξω ότι $Y_{n+1} - Y_n$ είναι πολυώνυμο του B με ≥ 0 συντελεστές

Επαγωγικά:

$Y_1 - Y_0 = \frac{1}{2}B - 0$ OK

και αν ξέρω ότι το $Y_n - Y_{n-1}$ είναι πολ. του B με ≥ 0 συντ.

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(B + Y_n^2) - \frac{1}{2}(B + Y_{n-1}^2)$$

$$= \frac{1}{2}(Y_n^2 - Y_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})(Y_n - Y_{n-1})$$

$$\frac{1}{2}(Y_n^2 - \underbrace{Y_nY_{n-1} + Y_{n-1}Y_n}_{\text{ίσα}} - Y_{n-1}^2)$$

γιατί $Y_nY_m = Y_mY_n$

αφού και τα δύο είναι πολυώνυμα του B

$$Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{2}(Y_n + Y_{n-1})\underbrace{(Y_n - Y_{n-1})}_{\text{επαγωγή! πολ. του } B \text{ με } \geq 0 \text{ συντ.}}$$

πολ. του B
με ≥ 0 συντ.
από Ισχχ

= πολ. του B με ≥ 0 συντ.

άρα ≥ 0

ΘΔΩ $Y_{n+1} \geq Y_n$

τέλος! $0 \leq Y_n \leq Y_{n+1} \leq I$

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη Πρόταση

$\exists\, Y = Y^*$ ώστε $\forall\, \xi \in H$

$$Y\xi = \lim_n Y_n \xi$$

<u>Να δείξω</u> $\quad Y = \frac{1}{2}(B + Y^2)$

$\forall \xi,\ \xi \in H$

$$Y\xi = \lim_n Y_{n+1}\xi = \lim_n \frac{1}{2}(B + Y_n^2)\xi$$

$$= \frac{1}{2}B\xi + \frac{1}{2}\underbrace{\lim_n Y_n^2 \xi}_{\text{υπάρχει;}}$$

Ναι, διότι

$$\|Y^2\xi - Y_n^2\xi\| = \|(Y - Y_n)Y\xi + Y_n(Y - Y_n)\xi\|$$

$$\leq \|(Y - Y_n)(Y\xi)\| + \|Y_n\|\, \|(Y - Y_n)\xi\|$$

$$\leq \underbrace{\|(Y - Y_n)\eta\|}_{\downarrow 0,\ \eta = Y\xi} + \underbrace{\|(Y - Y_n)\xi\|}_{\downarrow 0}$$

άρα $\exists \lim_n Y_n^2 \xi = Y^2 \xi \quad \forall \xi$

οπότε $\quad Y\xi = \frac{1}{2}B\xi + \frac{1}{2}\lim_n Y_n^2\xi = \frac{1}{2}B\xi + Y^2\xi$

$$Y = \frac{1}{2}(B + Y^2) \qquad (Y \leq I)$$

άρα θέτω $X = I - Y \geq 0$

άρα $X^2 = (I - Y)^2 = (I - B) = A$

$$\|Y - Y_n\| \xrightarrow{??} 0$$

<u>μόνο</u> $\|Y\xi - Y_n\xi\| \to 0 \quad \forall \xi$

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

$XT = TX \quad \forall T \in \mathcal{B}(H)$ που $\underline{AT = TA}$ (X ανήκει στο μεταθέτη του μεταθέτη του A, $X \in \{A\}''$)

$B = I - A, \quad Y = I - X$

Αρχικά $AT = TA \Longrightarrow BT = TB \Longrightarrow \underline{B^2T} = B(BT) = B(TB) = (BT)B = (TB)B = \underline{TB^2}$

$\Downarrow$ $\forall$ πολυώνυμο $p_n(B)$

$p_n(B)T = Tp_n(B)$

$\Downarrow$ $Y_n = p_n(B)$

Επαγωγικά $B^nT = TB^n$ οπότε για $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\forall n \quad Y_nT = TY_n$

$\forall \xi: \quad Y_n(T\xi) = T(Y_n\xi)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$Y(T\xi) = T(Y\xi)$ άρα $YT = TY$

$\Downarrow$

$XT = TX$

Μοναδικότητα: ο $X \in B_+(H)$ με $X^2 = A$ είναι μοναδικός θετικός

Άρα Αν: $C \in B_+(H)$ με $C^2 = A$ τότε θα $C = X$

Παρατήρηση: Αλγεβρικώς! [αν $x, c \geq 0$ και $x^2 = c^2 \neq 0$ τότε $x = c$

Αφού $c^2 - x^2 = 0$

$$\Downarrow$$

$$c(c-x)\underbrace{(c+x)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow c - x = 0$$

διαιρώ με $c+x$]

Από τη σχέση

$C^2 = A = X^2$ θέλω $C = X$

$C^2 - X^2 = 0$ αλλά $(C-X)(C+X) = 0$ $(*)$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $C - X = 0$

(διότι ο C μετατίθεται με τον X

διότι $CA = CC^2 = C^2C = AC$

και ο X μετατίθεται με $\forall T$ με $TA = AT$

άρα X μετατίθεται με C)

$$\overbrace{(C+X)}^{?}(C-X)\xi = 0 \quad \forall \xi$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} (C-X)\xi = 0$$

Κατανόηση! αφού οι C, X είναι θετικοί, από θεώρημα

$\exists$ D, Z θετικοί,

$D^2 = C$, $Z^2 = X$

Θέτω $\boxed{\eta = (C-X)\xi}$ και υπολογίζω!

$\|D\eta\|^2 + \|Z\eta\|^2 = \langle D\eta, D\eta\rangle + \langle Z\eta, Z\eta\rangle$ (διότι $D, Z \in B_s(H)$)

$= \langle D^2\eta, \eta\rangle + \langle Z^2\eta, \eta\rangle$

για να δω $A^{1/2}$ είναι μοναδική

χρησιμοποιώ και η

$$A^{1/4} = Z$$

$$= \langle C\eta, \eta\rangle + \langle X\eta, \eta\rangle$$

$$= \langle (C+X)\eta, \eta\rangle$$

$$= \langle (C+X)(C-X)\xi, \eta\rangle$$

$$= \langle \underbrace{(C^2-X^2)}_{0}\xi, \eta\rangle = 0$$

$$\|D\eta\|^2 + \|Z\eta\|^2 = 0$$

οπότε $D\eta = 0$ και $Z\eta = 0$

άρα $D^2\eta = 0$ και $Z^2\eta = 0$

$C\eta = 0$ και $X\eta = 0$

$C(C-X)\xi = 0$ και $X(C-X)\eta = 0$

$$\Rightarrow (C-X)(C-X)\xi = 0 \qquad C-X \in \mathcal{B}_h(H)$$

$$\Rightarrow \langle (C-X)(C-X)\xi, \xi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle (C-X)\xi, (C-X)\xi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|(C-X)\xi\|^2 = 0 \quad \text{άρα } (C-X)\xi = 0 \ \forall \xi$$

$$\Downarrow$$

$$C - X = 0$$

∎

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

Πόρισμα

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, τότε ο AB είναι θετικός αν και μόνον αν $AB = BA$.

Απόδ. Αν $AB \geq 0$ τότε είναι αυτοσυζυγής $AB = (AB)^* = B^*A^* = BA$! αναγκαία

Ικανή: υποθέτω ότι $AB = BA$ οπότε ο $(AB) = (AB)^*$

$$\Downarrow$$

$$A^{1/2}B = BA^{1/2}$$

$\forall \xi$ τότε $\langle AB\xi, \xi\rangle = \langle A^{1/2}A^{1/2}B\xi, \xi\rangle = \langle A^{1/2}B\xi, A^{1/2}\xi\rangle$

$= \langle B A^{1/2}\xi, A^{1/2}\xi \rangle = \underbrace{\langle B\eta, \eta \rangle}_{\geq 0}$ αφού $B \geq 0$

άρα $\langle (AB)\xi, \xi \rangle \geq 0 \quad \forall \xi$ οπότε AB είναι θετικός

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^{\perp}$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \to Tx$ και να επεκτείνεις...