Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

Περιεχόμενα

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

$$\|Tx - Tx'\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \overset{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

$T : (E, \| \|_E) \longrightarrow (F, \| \|_F)$ γραμμικός

$T \in \mathcal{B}(E,F) \iff T$ συνεχής στο 0 δηλ: " $\|x_n\|_E \to 0 \Rightarrow \|Tx_n\|_F \to 0$ "

$\iff \sup\{\|Tx\|_F : x \in \mathrm{ball}(E)\} < +\infty$

$\iff \exists\, M : \ \forall x \in E : \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E \quad (*)$

- Ερωτ.: • αρκεί να το δείξω για x σ' ένα πυκνό $\subseteq E$
  - " " x σε μια ΟΚ βάση ?
- Ερωτ "

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle , i = 1, \dots n, \, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i\rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i\rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle), (F, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ είναι συνεχής. Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F, ορίζεται ένας $n \times m$ πίνακας $[a_{nm}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle, i = 1, \dots n, k = 1, \dots m.$$

Αντίστροφα, κάθε $[a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική απεικόνιση $T : E \to F$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή.

• Γενικότερα, κάθε φραγμένος τελεστής $T : \ell^2 \to \ell^2$ ορίζει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[\langle Te_k, e_i \rangle]$, όπου $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του ℓ^2. Δεν ισχύει όμως το αντίστροφο. Παράδειγμα;

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n)$, $a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$

$$T \sim \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \ddots \end{bmatrix} \iff T(e_n) = a_n e_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

T φραγμ. $\iff \|a\|_\infty = \sup |a_n| < +\infty$

φραγμένα $D_a : \ell^2 \to \ell^2$

Γενικότερα, αν (H_1, H_2) χώροι Hilbert, διαχωρίσιμοι με ον. βάσεις $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$\forall a = (a_n)$ $a_n \in \mathbb{K}$

$$T_0 : H_1 \to H_2, \quad e_n \mapsto a_n f_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

επεκτείνεται γραμμικά σε

$$T_0 : \mathrm{span}\{e_n\} \to \mathrm{span}\{f_n\}, \quad \sum \langle x, e_n \rangle e_n \to \sum \langle x, e_n \rangle a_n f_n$$

φραγμ. $\iff \|a\|_\infty < +\infty$

$a \in \ell^\infty$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & H_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "U"'] & H_2 \arrow[d, "V", shift left] & y \arrow[d] \\ (\langle x, e_n \rangle)_n & \ell^2 \arrow[r, "D_a"] & \ell^2 \arrow[u, "I", shift left] & \langle y, f_n \rangle \end{tikzcd}$$

$(\langle x, e_n \rangle) \to (a_n \langle x, e_n \rangle)_n \in \ell^2$ γιατί $\|a\|_\infty < +\infty$

$T := V^{-1} D_a U$: σύνθεση τριών φραγμ.

ισομετρία άρα φραγμ.

$$\|T(x)\|^2_{H_2} = \Big\|\sum \langle x, e_n\rangle a_n \underset{\text{ON}}{f_n}\Big\|^2_{H_2}$$

$|a_n| \leq \|a\|_\infty$

Πυθ

$$= \sum_n |\langle x, e_n\rangle|^2 |a_n|^2$$ όχι Cauchy-Schwartz

$$\leq \|a\|_\infty^2 \sum |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|a\|_\infty^2 \|x\|^2_{H_1}$$

άρα $\|Tx\| \leq \|a\|_\infty \|x\|$ άρα T φραγμ.

βρήκα κατάλληλη σταθερά

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n), \;\; a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n), \;\; a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n), \;\; a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i \rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

- Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i \rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η
$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Διαγώνιοι τελεστές Αν $a = (a_n), \;\; a_n \in \mathbb{K}$ είναι τυχούσα ακολουθία, η απεικόνιση $(x(n)) \to (a_n x(n))$ στέλνει τον ℓ^2 στον ℓ^2 αν-ν $(a_n) \in \ell^\infty$ και τότε ορίζει φραγμένο τελεστή D_a με νόρμα $\|D_a\| = \|a\|_\infty$. Έχουμε $\langle D_a e_k, e_i\rangle = a_k \delta_{ik}$ (διαγώνιος πίνακας).
Ο συζυγής του τελεστή D_a είναι ο D_b, όπου $b = a^*$ (Δηλαδή $b(n) = \overline{a(n)}$ για κάθε n).

• Τελεστές Hilbert-Schmidt Μία ικανή (αλλά όχι αναγκαία) συνθήκη ώστε ένας $\infty \times \infty$ πίνακας $[a_{ik}]$ να ορίζει φραγμένο τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$ ώστε $a_{ik} = \langle Te_k, e_i\rangle$ για κάθε $i, k \in \mathbb{N}$ είναι η $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$ (σύγκρινε με τους διαγώνιους). Έχουμε

$$(Tx)(i) = \langle Tx, e_i\rangle = \sum_k a_{ik} x(k) \text{για κάθε } \; x \in \ell^2 .$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a,b]), \|\cdot\|_2) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x,y)|^2 dxdy$.

όχι $\| \|_\infty$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $k \in C([a,b] \times [a,b])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy, \quad f \in C([a,b]).$$

Ορίζει γραμμικό τελεστή $T_k^o : (C([a,b]), \|\cdot\|_2) \to (C([a,b]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένο, με $\|T_k^o\|^2 \leq \iint |k(x,y)|^2 dx dy$.
Άρα επεκτείνεται σε $T_k : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). $(M_f^o g)(t) = f(t)\,g(t) \quad \forall t \in [a,b]$

Είναι φραγμ ως προς την νόρμα $\| \ \|_2$; (f είναι συνεχής άρα φραγμ)

$$\|M_f^o g\|_2^2 = \int_a^b |f(t)g(t)|^2 dt \le \int_a^b \|f\|_\infty^2 |g(t)|^2 dt = \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2$$

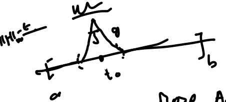
οπότε $\|M_f^o g\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2 \quad \forall g \in C([a,b])$

$: M_f^o : (C[a,b], \| \ \|_2) \longrightarrow (C([a,b]), \| \ \|_2)$ φραγμ

επομένως επεκτείνεται ! σε

$$M_f : L^2[a,b] \longrightarrow L^2[a,b]$$

με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$



Πρότ Αρκεί να πάρω f οποιαδήποτε και (άρα) φραγμένη

Ισχύει ισότητα $\|M_f\| \overset{?}{=} \|f\|_\infty$

$|f|$ συνεχής, άρα παίρνει μέγιστο σε κάποιο $t_0 \in [a,b]$, άρα

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διάστημα $J \subseteq [a,b]$ ώστε $|f(t)| > \|f\|_\infty - \varepsilon \quad \forall t \in J$

Υπάρχει $g \in C([a,b])$, $0 \le g \le 1$ ώστε $g|_{J^c} = 0$, $g \neq 0$

όμως $\|M_f g\|_2^2 = \int_a^b |f(t) g(t)|^2 dt = \int_J |f(t)|^2 |g(t)|^2 dt \geq \int_J (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 |g(t)|^2 dt$

$$= (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 \int_J |g(t)|^2 dt = (\|f\|_\infty - \epsilon)^2 \underbrace{\int_a^b |g(t)|^2 dt}_{= \|g\|_2^2}$$

$\exists g \in C([a,b]),\ g \neq 0$!

$$(\|f\|_\infty - \epsilon)\|g\|_2 \leq \|M_f g\|_2 \leq \|M_f\| \|g\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$$

$$g \neq 0 \Rightarrow \|f\|_\infty - \epsilon \leq \|M_f\| \leq \|f\|_\infty \quad \forall \epsilon > 0$$

άρα $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν f είναι ουσιωδώς φραγμένη μετρήσιμη

τότε ορίζεται $M_f \in B(L^2([a,b]))$

με $\|M_f\| = \|f\|_\infty$

ουσιώδες supremum

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \le \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).

Γενικότερα στο $L^2(\mathbb{R})$:

Έστω $f \in C_b(\mathbb{R})$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και φραγμένη, $\|f\|_\infty < +\infty$

$\forall g \in C_c(\mathbb{R})$ (: g συνεχής και $\exists [-M,M]$ ώστε $g|_{[-M,M]^c} = 0$)

τότε $fg \in C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$

$$\|fg\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(t)|^2 dt = \int_{-M}^{M} |f(t)|^2 |g(t)|^2 dt$$

$$\le \|f\|_\infty^2 \int_{-M}^{M} |g|^2 = \|f\|_\infty^2 \int_{\mathbb{R}} |g|^2 = \|f\|_\infty^2 \|g\|_2^2$$

: $\|fg\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2 \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R})$

οπότε η απεικόνιση $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (C_c(\mathbb{R}), \|\ \|_2)$ γραμμική + φραγμ.

$$g \longmapsto fg$$

άρα επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή από την πλήρωση στην πλήρωση

$M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : g \longmapsto fg \quad \forall g \in C_c(\mathbb{R})$

για κάθε $f \in C_b(\mathbb{R})$

Δείξτε ότι άρα $\|M_f\| = \|f\|_\infty$ (άσκηση)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

• Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και
$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2([a,b])$. Αν $f \in C([a,b])$, ορίζουμε

$$M_f^o : C([a,b]) \to C([a,b]) : g \to fg$$

(κατά σημείο γινόμενο). Επειδή $\|fg\|_2 \leq \|f\|_\infty \|g\|_2$, ο M_f^o επεκτείνεται σε $M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ με $\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (μάλιστα, ισότητα).
(Αλλιώς: με μέτρο) Πάρε $f \in L^\infty(\mu)$ και όρισε
$M_f : L^2(\mu) \to L^2(\mu) : g \to fg$. Είναι καλά ορισμένος και
$\|M_f\| \leq \|f\|_\infty$ (ισότητα για σ-πεπερασμένο μ).
Ο συζυγής του τελεστή M_f είναι ο τελεστής M_g όπου $g = f^*$. Δηλαδή $M_f^* = M_{f^*}$.

$g, h \in C[a,b]$

$$\underline{\langle M_f^* g, h\rangle} \overset{\text{def}}{=} \langle g, M_f h\rangle = \int_a^b g(t)\,\overline{(fh)(t)}\,dt = \int_a^b \overline{f(t)}\, g(t)\, \overline{h(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b (\bar f g)(t)\,\overline{h(t)}\,dt$$

$$= \langle \underline{\bar f g}, h\rangle$$

$\Rightarrow \underline{M_f^* g} = \bar f g \quad \forall\, g \in C[a,b]$ " πυκνό

$= \underline{M_{\bar f}\, g}$ και οι M_f^* και $M_{\bar f}$ ένα φρ. τ. έχω $M_f^* = M_{\bar f}$

$$\underset{M_f^*}{\underset{\parallel}{Tg}} = \underset{M_{\bar f}}{\underset{\parallel}{Sg}} \quad \forall g \in C[a,b] \iff \underbrace{(T-S)}_{\text{bounded}} g = 0 \quad \forall g \in C([a,b])$$

$$\Downarrow$$

$$(T-S)g = 0 \quad \forall g \in L^2[a,b]$$

$$\Downarrow$$

$$T - S = 0$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}:$$

$\approx \ell^2(\mathbb{N})$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |x(k)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |x(-n)|^2$$

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

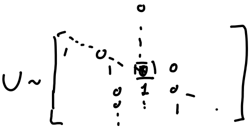
Ορίζω U, V: $\quad U \longrightarrow$ (για δεξιά ολίσθηση) $\qquad V \longleftarrow$ για τα αριστερά

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

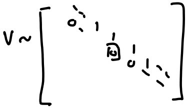
δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον $\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:



$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$



Ορίζω U, V: $U(e_n) = e_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{Z}$, $V(e_n) = e_{n-1}$

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$

$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (shift operators) στον
$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{K} : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|^2 < \infty\}$:

$$x = (\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots)$$

Ορίζω U, V:

$$Ux = (\dots, x(-2), x(-1), x(0), x(1), \dots)$$
$$Vx = (\dots, x(0), x(1), x(2), x(3), \dots)$$

δηλαδή $(Ux)(n) = x(n-1)$ και $(Vx)(n) = x(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
Προφανώς $U, V : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$, γραμμικοί, ισομετρίες και επί, διότι $UV = VU = I$, δηλ. $U^{-1} = V$.
Ο συζυγής του U είναι ο V. Άρα $UU^* = U^*U = I$.

$\forall x, y \in \ell^2(\mathbb{Z})$

$$\langle U^*x, y\rangle = \langle x, Uy\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{Uy(n)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n)\overline{y(n-1)} \underset{k=n-1}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k+1)\overline{y(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (Vx)(k)\overline{y(k)} = \langle Vx, y\rangle$$

άρα $U^* = V$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και}\ \ Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } \; Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες,

$x \in c_{00}(\mathbb{Z})$: $\quad x = \sum_{k=-N}^{N} x(k) e_k$

$$Ux = \sum_{k=-N}^{N} x(k) e_{k+1} \left(= \sum_{n=-N+1}^{N+1} x(n-1) e_n \right) \qquad n = k+1$$

ισομετρία - γιατί $\|Ux\|_2^2 = \sum_{|k| \le N} |x(k)|^2 = \|x\|_2^2$

(όμοια για τον V)

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$
\begin{aligned}
Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\
\text{και } \; Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και} \;\; Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$: (ισοδύναμα ℓ^2) ΟΝ βάση $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και} \;\; Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \;\; (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $T = S^*$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

- Τελεστές μετατόπισης (α) Στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ (αλλιώς):

$$\begin{aligned} Ue_n &:= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ \text{και } Ve_n &:= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z})$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-ισομετρίες, άρα επεκτείνονται σε ισομετρίες $\ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$. Δείχνουμε ότι $\langle Ve_n, e_m \rangle = \langle e_n, Ue_m \rangle$ για κάθε $n, m \in \mathbb{Z}$, άρα $V = U^*$ (γιατί;).

- (β) Στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$:

$$Se_n := e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ (n \in \mathbb{Z}_+)$$

$$\text{και } Te_n := \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

Επεκτείνω γραμμικά στον $c_{00}(\mathbb{Z}_+)$, παρατηρώ ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συστολές (δηλ. $\|Sx\|_2 \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$), άρα επεκτείνονται σε συστολές $\ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$). Δείχνω $T = S^*$.
(Μάλιστα ο S είναι ισομετρία. Ο S^*;)

$Se_n = e_{n+1}$

$x \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$: $x = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) e_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} x(k) e_k$

$Sx = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) S e_k$ (~~αν ξέρω~~ ότι ο S είναι συνεχής)

Καλύτερα: $x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$: $x = \sum_{k=0}^{n_x} x(k) e_k$ (πεπ. πλήθος $\neq 0$ όρων)

$\Downarrow$ S γρ

$$Sx = \sum_{k=0}^{n_x} x(k)\, S e_k = \sum_{k=0}^{n_x} x(k) e_{k+1}$$

όμοια

$$Tx = \sum_{k=0}^{n_x} x(k)\, T e_k = \sum_{k=1}^{n_x} x(k) e_{k-1}$$

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n_x} |x(k)|^2 \le \sum_{k=0}^{n_x} |x(k)|^2 = \|x\|_2^2$$

$\|Tx\|_2 \le \|x\|_2 \quad \forall x \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$

όμοια βρίσκω $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$ "

άρα είναι ομοιόμ. συνεχείς και άρα επεκτείνονται $\ell^2 \to \ell^2$

Ισχ. $T = S^*$

$$\langle Te_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \langle e_{n-1}, e_m\rangle, & n \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1 & \text{αν } n-1=m \end{cases} = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1, & \text{αν } n=m+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & n=0 \\ \langle e_n, e_{m+1}\rangle, & n \ge 1 \end{cases} = \langle e_n, e_{m+1} \rangle \quad \forall n,m \in \mathbb{Z}_+$$

$$= \langle e_n, Se_m \rangle \quad "$$

λόγω γραμμικότητας $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle \quad \forall x,y \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$

" συνέχεια " $\forall x,y \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

άρα: $\langle Tx, y\rangle = \langle S^* x, y\rangle \quad \forall x,y$

άρα $T = S^*$

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

$$
\begin{aligned}
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}) :\ Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}\\
U^* e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z})\\
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+) :\ Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)}\ \ (n \in \mathbb{Z}_+)\\
S^* e_n &= \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)}
\end{aligned}
$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

προς

$Ux(n) = x(n-1)$

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$.

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned} \text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}) : \ Ue_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\ U^*e_n &= e_{n-1} \quad \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\ \text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+) : \ Se_n &= e_{n+1} \quad \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ \ (n \in \mathbb{Z}_+) \end{aligned}$$

$$S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} \qquad \text{(μετατόπιση αριστερά)}$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση $\underline{\operatorname{supp} f} \subseteq [-M, M]$ $\quad \operatorname{supp} f_t \subseteq \underbrace{[-M+t, M+t]}_{\text{συμπαγές}}$

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

✓

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;).

$$\|\lambda_t f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{|(\lambda_t f)(s)|^2 ds}_{\text{σε συμπαγές}} = \int_{-M+t}^{M+t} |f(s-t)|^2 ds \underset{s-t=x}{=} \int_{-M}^{M} |f(x)|^2 dx = \|f\|_2^2 \quad \text{ισομετρία}$$

Είναι επί, διότι: $\forall f \in C_c(\mathbb{R})\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$(\lambda_{-t}(f_t))(s) = f_t(s+t) = f(s+t-t) = f(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

άρα $\lambda_{-t} \circ \lambda_t = I$

άρα λ_t είναι αντιστρέψιμη και $\lambda_t^{-1} = \lambda_{-t}$

άρα επί

Φραγμένοι τελεστές: Παραδείγματα

Συμπέρασμα

$$\begin{aligned}
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}):\ & Ue_n = e_{n+1} && \text{(μετατόπιση δεξιά)} \\
& U^*e_n = e_{n-1} && \text{(μετατόπιση αριστερά)} \quad (n \in \mathbb{Z}) \\
\text{Στον } \ell^2(\mathbb{Z}_+):\ & Se_n = e_{n+1} && \text{(μετατόπιση δεξιά)} \ (n \in \mathbb{Z}_+) \\
& S^*e_n = \begin{cases} e_{n-1} & \text{όταν } n \geq 1 \\ 0 & \text{όταν } n = 0 \end{cases} && \text{(μετατόπιση αριστερά)}
\end{aligned}$$

- (γ) Στον $L^2(\mathbb{R})$ (translation operators):

Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν $f \in C_c(\mathbb{R})$, ορίζω $f_t : s \to f_t(s) = f(s-t)$. Τότε $f_t \in C_c(\mathbb{R})$ και η απεικόνιση

$$\lambda_t : (C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2) : f \to f_t$$

είναι (γραμμική) ισομετρία επί (γιατί;). Άρα επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία $L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, επί. (γιατί $\lambda_t(L^2(\mathbb{R})) \supseteq C_c(\mathbb{R})$, και είναι κλειστό άρα είναι $= L^2(\mathbb{R})$)

Γενικότερα, αν Γ είναι μία (αριθμήσιμη) ομάδα

ορίζω $\ell^2(\Gamma) = \{ x : \Gamma \to \mathbb{K}$ με $\sum_{t\in\Gamma} |x(t)|^2 < +\infty \}$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{t\in\Gamma} x(t)\overline{y(t)} \quad \text{(συνήθες εσωτερικό)}$$

είναι χώρος Hilbert

$\forall t \in \Gamma$ ορίζω $\lambda_t : c_{00}(\Gamma) \to c_{00}(\Gamma)$

$x \longmapsto x_t$ όπου $x_t(s) = x(t^{-1}s)$

υπολογίζω

$$\|x_t\|_2^2 = \sum_{s\in\Gamma} |x_t(s)|^2 = \sum_{s\in\Gamma} |x(t^{-1}s)|^2$$

θέτω $r = t^{-1}s$

$tr = s$

$s \to t^{-1}s$

$\Gamma \to \Gamma$ 1-1 και επί

$$= \sum_{r\in\Gamma} |x(r)|^2 = \|x\|_2^2$$

άρα $\lambda_t : x \mapsto x_t$ είναι ισομετρία ως προς $\| \ \|_2$ οπότε επεκτείνεται σε ισομετρία $\ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$

η $\Gamma \longrightarrow \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$, $t \longmapsto \lambda_t$ είναι μορφισμός: $\lambda_{t_1 t_2} = \lambda_{t_1}\lambda_{t_2}$ και $\lambda_e = I_{\ell^2(\Gamma)}$

είναι μια αναπαράσταση της Γ στο $\ell^2(\Gamma)$

η αριστερή κανονική αναπαράσταση.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων [4] ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0,1])$ του $L^2([0,1])$,

που περιέχει τον χώρο των πολυωνύμων

$$(C^1([0,1]), \|\ \|_2) \longrightarrow (C([0,1]), \|\ \|_2)$$
$$f \longmapsto Df$$

[$\forall f \in L^2([0,1]), \forall \epsilon>0\ \exists g \in C([0,1]) : \|f-g\|_2 < \epsilon$

Τώρα από Weierstrass $\exists\, p$ πολυώνυμο $\|g-p\|_\infty < \epsilon$

όπου $\|g-p\|_2^2 = \int |g-p|^2 \leq \epsilon^2(1-0)$

άρα $\|g-p\|_2 < \epsilon$

τελικά $\|f-p\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-p\|_2 < 2\epsilon$]

ισχυρίζομαι ότι η D ΟΧΙ ΣΥΝΕΧΗΣ πάρε $f_n(t) = t^n,\ t \in [0,1]$

όπου $\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1}$

αλλά $\|Df_n\|_2^2 = \int_0^1 |n t^{n-1}|^2 dt = n^2 \int_0^1 t^{2n-2}\,dt = \frac{n^2}{2n-1}$

---

[4] Δηλ. των $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0,1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Μη Φραγμένοι τελεστές: Ένα παράδειγμα

Στον χώρο $C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων [4] ορίζουμε $Df = f'$. Είναι γραμμική απεικόνιση, καλά ορισμένη στον πυκνό υπόχωρο $C^1([0,1])$ του $L^2([0,1])$, αλλά δεν επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, γιατί δεν είναι συνεχής ως προς τη νόρμα του $L^2([0,1])$: δεν υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|Df\|_2 \leq M \|f\|_2$ για κάθε $f \in C^1([0,1])$.

επειδή $\|f_n\|_2 \longrightarrow 0$

ενώ $\|Df_n\|_2 = \frac{n}{\sqrt{2n-1}} \not\to 0$

[4] Δηλ. των $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ που έχουν παράγωγο $f'(x)$, $\forall x \in [0,1]$ (στα άκρα οι πλευρικές) και η $f' : [0,1] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E,F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E,E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E,F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E,F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E,E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E,F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E,F)$.
Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E,F)$ είναι χώρος Banach.

(ανεξάρτητα από το αν ο E είναι πλήρης ή όχι)

$\|T+\lambda S\| = \sup\{ \|Tx+\lambda Sx\|_F : x \in ball(E)\}$

$\|Tx+\lambda Sx\|_F \le \|Tx\|_F + |\lambda|\,\|Sx\|_F$

$\le \|T\|\,\|x\|_E + |\lambda|\,\|S\|\,\|x\|_E$

sup ως προς $x \in ball(E)$:

$\|Tx+\lambda Sx\| \le \|T\| + |\lambda|\,\|S\|$ άρα $\|\ \|$ είναι ημινόρμα

αλλά αν $\|T\|=0$ τότε $\forall x \in E$ έχω $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$ είναι $=0$ άρα $T=0$

Παρ. όταν οι E, F έχουν $\langle , \rangle$ άρα η $\|\cdot\|$ είναι αντίστοιχη νόρμα

πχ "ℓ^2" ν νόρμα γενικά ΔΕΝ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο (εκτός αν $\dim E \dim F \le 1$)

$\|T\|$ είναι supremum ορίων

Πληρότητα (T_n) $T_n \in B(E,F)$ που είναι βασική ως προς $\|\ \|$

να δείξω ότι $\exists\ T : E \to F$ γραμμ. + φραγμ. με $\|T_n - T\| \to 0$

δηλ. $\|T_n x - Tx\|_F \to 0$ ομοιόμορφα ως προς $x \in ball(E)$

Σταθ. $x \in E$

$\rightsquigarrow (T_n x)$ ακολουθία στο F

πράγ. $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m \ge n_0\ \|T_n - T_m\| < \epsilon$ (υπόθεση)

$\Rightarrow \|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)x\|_F$

$\le \|T_n - T_m\|\,\|x\|_E < \epsilon \|x\|_E$

άρα η ακολουθία $(T_n x)$ είναι βασική στο $(F, \|\ \|_F)$: πλήρης!

άρα $\exists!\, y_x \in F$ ώστε $\|T_n x - y_x\|_F \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$y_x = \lim T_n x$$

οπότε έχω καλά ορισμένη απεικόνιση $T : E \longrightarrow F : x \longmapsto y_x$

• T γραμμική: $\checkmark$ $T(x_1 + \lambda x_2) = y_{x_1+\lambda x_2} = \lim_n T_n(x_1 + \lambda x_2)$

αλλά T_n γρ.

$$= \lim_n (T_n x_1 + \lambda T_n x_2)$$

$\exists \lim$

$$= \lim_n T_n x_1 + \lambda \lim T_n x_2$$

$$= y_{x_1} + \lambda y_{x_2}$$

$$= T(x_1) + \lambda T(x_2)$$

• νδο T φραγμ. και ότι $\|T - T_n\| \to 0$

από την υποθ., $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0(\epsilon) : \underline{\forall n, m \geq n_0}$:

$$\|T_n - T_m\| < \epsilon$$

οπότε $\forall x \in E$

$$\|T_n x - T_m x\| < \epsilon \|x\|$$

Σταθ. $n \geq n_0$ και αφήνω $m \to \infty$ οπότε $T_m x \longrightarrow Tx$

άρα

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon \|x\| \quad \forall n \geq n_0,\ \forall x \in E \qquad (*)$$

$\|Tx\| \le \epsilon\|x\| + \|T_{\nu_0}x\| \le (\epsilon + \|T_{\nu_0}\|)\|x\| \quad \forall x \in E$

οπότε άρα $T \in \mathcal{B}(E,F)$

όπου μάλιστα $\|T\| \le (\epsilon + \|T_{\nu_0}\|)$

Τώρα που ξέρω ότι $T \in (\mathcal{B}(E,F), \|\ \|)$ η $(*)$

παίρνοντας sup ως προς $x \in ball(E)$.

$\|T_\nu - T\| \le \epsilon \quad \forall \nu \ge \nu_0$

να $T_\nu \xrightarrow{\|\ \|} T$ ∎

Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$. Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$.

Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$. Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$.

Ορισμός

Ο (τοπολογικός) δυικός (dual) E^* ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών $f : E \to \mathbb{K}$, δηλαδή ο $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$. Είναι πάντα χώρος Banach.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x,y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x,y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα

(iii) $\sup\{|\phi(x,y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Παράδειγμα $\phi(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in B_1(H_1), y \in B_2(H_2)\} \end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j\right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \leq 1\right\}$$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη ανν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H. Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

αν $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ισχύει η ισότητα $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\}$.

... αλλά όχι εν γένει.

Πόρισμα

Έστω H *μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση* $T : H \to H$ *είναι φραγμένη αν και μόνον αν*

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \text{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \text{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $T = T^*$, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *από την σχέση*

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *από την σχέση*

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *από την σχέση*

$$\phi(x,y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 *είναι δύο χώροι Hilbert και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } \; x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* *είναι φραγμένος και* $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y,x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.