Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

1 Απριλίου 2022

Πρωταπριλιά

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.
Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.
(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ είναι αυτομάτως θετικός.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h \ \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$-κλειστός.

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} A \geq B,\, S \geq T &\Rightarrow A + S \geq B + T \\ \text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 &\Rightarrow \lambda A \geq \mu B. \end{aligned}$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

$$\begin{aligned} \text{Αν } A = A^* \text{ τότε } \quad & -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I \\ \text{άρα } \quad & A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad \text{(διαφορά δύο θετικών)} \end{aligned}$$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα (δηλ. $B_{n+1} - B_n \geq 0 \ \forall n$) και φραγμένη (δηλ. $\sup_n \|B_n\| < \infty$) ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο:

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα (δηλ. $B_{n+1} - B_n \geq 0 \; \forall n$) και φραγμένη (δηλ. $\sup_n \|B_n\| < \infty$) ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο:

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle \langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα (δηλ. $B_{n+1} - B_n \geq 0 \; \forall n$) και φραγμένη (δηλ. $\sup_n \|B_n\| < \infty$) ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$.
Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$.

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$. εκ.σ. όριο πολυωνύμων του A
Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

Πόρισμα

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, τότε ο AB είναι θετικός αν και μόνον αν $AB = BA$.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ *υπάρχει* ***μοναδικός θετικός*** *τελεστής* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$. *Ο τελεστής αυτός λέγεται* ***τετραγωνική ρίζα*** *του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ *μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον* A.

Πόρισμα

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ *είναι θετικοί τελεστές, τότε ο* AB *είναι θετικός αν και μόνον αν* $AB = BA$.

$\forall x \in H_1 : \langle Ax, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0$

Πρόταση

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, *ο τελεστής* $A = \underline{T^*T} \in \mathcal{B}(H_1)$ *είναι θετικός.*
Αντίστροφα, αν $A \in \mathcal{B}(H_1)$ *θετικός τελεστής υπάρχει τελεστής* $T \in \mathcal{B}(H_1)$ *ώστε* $A = T^*T$.

Αν $A \in \mathcal{B}(H_1)_+$ τότε $\exists\, A^{1/2} \in \mathcal{B}(H_1)_+$ ώστε
$A = (A^{1/2})^2 = (A^{1/2})^*(A^{1/2}) = T^*T$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Προειδοποίηση — Άσκηση: $\exists\, A, B \in \mathcal{B}(H) : |A+B| \neq |A| + |B|$
(αρκεί και αν $\dim H = 2$)

Υπενθύμιση: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ υπάρχ. $z = e^{i\theta}|z|$ όπου $|z| > 0$
και $|e^{i\theta}| = 1$

πολική αναπαράσταση:

$$z = \frac{z}{|z|}|z| \quad \text{όπου} \quad |z| = \sqrt{\bar{z} z}$$

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$$

Α $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ μετρ.

$$f = u|f|$$

όπου $|f|(x) \geq 0 \quad \forall x$

και $|u(x)| = 1 \quad \forall x$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

$\ker V = \{x \in H_1 : Vx = 0\}$

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V.

$H_1 = M \oplus M^\perp$

$$V: \quad M \xrightarrow{\text{ισομ.}} V(M), \qquad M^\perp \longrightarrow 0$$

αρχ. χώρος

τελ. χώρος κλειστός, διότι

M κλειστός, άρα πλήρης $\subseteq H_1$

και η $V|_M$ ισομετρία

Επομένως, αν $y \in \overline{V(M)}$ $\exists\, (x_n)$ τ.ω. $Vx_n \longrightarrow y$, γνωρίζω $x_n \in M$ όπως (*)

$\|x_n - x_m\| = \|Vx_n - Vx_m\|$ (αφού $V|_M$ ισομετρία)

(*) άρα (x_n) είναι βασική, άρα $\exists\, x \in M$ (κλειστό) ώστε $x_n \to x$

$\Downarrow$

$Vx_n \longrightarrow Vx$

οπότε $y = Vx \in V(M)$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & \circlearrowleft & H_2 \\ & H_1 \arrow[ur, "V"'] & \end{tikzcd}$$

μερ. ισομ.

<u>Απόδ.</u> Έστω περίπτωση $\dim H_1 < \infty$

- $|T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(H_1)_+$ άρα $\exists$ ορθ. βάση $\{e_1 \dots e_m\}$ του H_1 που διαγωνοποιεί την $|T|$ (φασμ. θεώρημα)

$\exists\ \lambda_\kappa$ ώστε $\underline{|T|e_\kappa = s_\kappa e_\kappa}$, $\kappa = 1 \dots m$

$\langle |T|e_\kappa, e_\kappa\rangle \geq 0$ άρα $s_\kappa \geq 0$

Τι κάνει ο T στα e_κ?

$$\langle Te_\kappa, Te_m\rangle = \langle T^*T e_\kappa, e_m\rangle = \langle |T|^2 e_\kappa, e_m\rangle = \langle s_\kappa^2 e_\kappa, e_m\rangle$$

$$= \begin{cases} s_\kappa^2 & , \kappa = m \\ 0 & , \kappa \neq m \end{cases}$$

Όπως $\forall s_\kappa \neq 0$ $f_\kappa := \dfrac{Te_\kappa}{s_\kappa}$ τότε $\{f_\kappa : s_\kappa > 0\}$ είναι ορθοκανονικό μέσα στο $\mathrm{Im}(T) \subseteq H_2$

$\{f_n : s_n > 0\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $Im(T)$

$\forall\, y \in Im(T)$ υπάρχει $y = T(x)$ και μπορεί

$x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$ οπότε $y = \sum \langle x, e_n \rangle T e_n$

και $x \perp Ker\, T$

Αν $\{e_1 \dots e_m\}$ ον βάση του H_1

$\{e_n : s_n = 0\}$ ον βάση του $Ker|T|$

$\{e_n : s_n > 0\}$ ον βάση του $(Ker|T|)^\perp$

$s_n = 0$: $e_n \xrightarrow{T} 0$

$s_n > 0$: $e_n \longrightarrow \underline{T e_n = s_n f_n}$ όπου $\{f_n : s_n > 0\}$ είναι ον βάση του $Im(T)$

μπορώ να ορίσω : $V : H_1 \longrightarrow H_2$

$e_n \longrightarrow f_n$ αν $s_n > 0$

$e_n \longrightarrow 0$ αν $s_n = 0$

η $V|_{(Ker|T|)^\perp}$ ισομετρία (στέλνει ον βάση σε ον σύνολο)

$V|_{Ker|T|} = 0$

αν $\underline{s_n > 0}$ $\quad V e_n = f_n = \frac{T e_n}{s_n}$: $\underline{T e_n} = V s_n e_n = \underline{V|T| e_n}$

$s_n = 0$ $\quad T e_n = 0$, $V|T| e_n = 0$

άρα πράγματι $T = V|T|$

$\boxed{///}$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

__Απόδ.__ Γενική παρατήρηση

Κρίσιμη παρατήρηση: $\forall x \in H_1$, $\|Tx\| = \||T|x\|$

__Απόδ.__ $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|^2 x, x\rangle$

$= \langle |T|x, |T|x\rangle$

$= \||T|x\|^2$

(__Άρα ισχύει__ $Tx = 0 \Longleftrightarrow |T|x = 0$

$\ker T = \ker |T|$)

Μπορώ εύκολα να ορίσω

~~$V_0 : \mathrm{Im}(T) \longrightarrow \mathrm{Im}(|T|)$~~

~~$Tx \longmapsto |T|x$~~ ~~καλά ορισμένη~~ ~~$V_0 = $ "$\frac{T}{|T|}$"~~

~~V_0: καλά ορισμένη γιατί αν $|T|x = |T|x'$ τότε $|T|(x-x') = 0$~~

$$\begin{array}{ccc} H_1 & & H_2 \\ \cup\!\! \mid & & \cup\!\! \mid \\ V_0 : \operatorname{Im}(|T|) & \longrightarrow & \operatorname{Im}(T) \\ |T|x & \longrightarrow & Tx \end{array}$$

V_0 καλά ορισμένη γιατί αν $Tx = Tx' \Rightarrow T(x - x') = 0$

$$\Rightarrow |T|(x-x') = 0 \Rightarrow |T|x = |T|x'$$

V_0 προφανώς γραμμική και ικανοποιεί
ισομετρία $\quad V_0|T| = T$ (πρακτικά $V_0 = \text{"}\frac{T}{|T|}\text{"}$)

αφού $\|V_0(y)\| = \|V_0|T|x\| = \|Tx\| = \||T|x\| = \|y\|$

οπότε επεκτείνεται μοναδικά σε ισομετρία

$$V_1 : \overline{\operatorname{Im}(|T|)} \longrightarrow \overline{\operatorname{Im}(T)}$$

και ικανοποιεί $V_1|T|x = V_0|T|x = Tx \quad \forall x \in H_1$

άρα $\underline{V_1|T| = T}$

Υπεν. Αν $E \subseteq H$ γραμμικός χώρος Hilbert $E^\perp = \overline{E}^\perp$

επεκτείνω τη V_1 σ' ολόκληρο τον H_1 ως εξής:

$\forall\, z \in H_1$ γράφεται μοναδικά $z = z_1 + z_2$
$z_1 \in \overline{\operatorname{Im}(|T|)}$ και $z_2 \perp \overline{\operatorname{Im}(|T|)}$

οπότε ορίζω $V(z) = V_1 z_1 + 0$

οπότε έχω $V \in B(H_1, H_2)$ μερική ισομετρία
(ισομετρία αν περιοριστεί στο $\overline{\operatorname{Im}(|T|)}$)

και $V|T| = V_1|T| = T$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \to Tx$ και να επεκτείνεις...

Πολική αναπαράσταση

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & \mathrm{Im}(T) \arrow[r] & H_2 \\
& \mathrm{Im}(|T|) \arrow[ur, "V_0"'] \arrow[d] & & \\
& H_1 \arrow[uurr, "V"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$|T|x \to Tx$

V_1

$\overline{\mathrm{Im}(T)}$

$\overline{\mathrm{Im}(|T|)}$

Πολική αναπαράσταση

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & \mathrm{Im}(T) \arrow[r] & H_2 \\
& \mathrm{Im}(|T|) \arrow[ur, "V_0"'] \arrow[d] & & \\
& H_1 \arrow[uurr, "V"'] & &
\end{tikzcd}$$

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής $V_1 : \overline{\mathrm{Im}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Im}(T)}$ ώστε $T = V_1|T|$.

<u>Απόδ.</u> η V_1 ορίζεται ως επέκταση (ισομετρική) της $V_0 : \mathrm{Im}(|T|) \to \mathrm{Im}\,T$

η V_0 είναι <u>επί</u> του $\mathrm{Im}(T)$ άρα η V_1 είναι επί του $\overline{\mathrm{Im}(T)}$

γιατί αν $y \in \overline{\mathrm{Im}(T)}$ $\exists\, y_n \in \mathrm{Im}(T)$ ώστε $y_n \to y$

αφού $y_n \in \mathrm{Im}(T)$ άρα $\exists\, x_n : Tx_n = y_n$

και τότε $V_0|T|x_n = Tx_n = y_n$

οπότε $y = \lim y_n = \lim V_0|T|x_n = \lim V_1 \underbrace{|T|x_n}_{\in \overline{\mathrm{Im}(T)}}$

Πολική αναπαράσταση

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & \mathrm{Im}(T) \arrow[r] & H_2 \\
& \mathrm{Im}(|T|) \arrow[ur, "V_0"'] \arrow[d] & & \\
& H_1 \arrow[uurr, "V"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής $V_1 : \overline{\mathrm{Im}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Im}(T)}$ ώστε $T = V_1|T|$.

Πολική αναπαράσταση

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & \mathrm{Im}(T) \arrow[r] & H_2 \\
& \mathrm{Im}(|T|) \arrow[ur, "V_0"'] \arrow[d] & & \\
& H_1 \arrow[uurr, "V"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής* $V_1 : \overline{\mathrm{Im}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Im}(T)}$ *ώστε* $T = V_1|T|$.

Επιπλέον, αν $\dim(\mathrm{Im}(|T|))^{\perp}) = \dim(\mathrm{Im}(T)^{\perp})$ τότε μπορούμε να επεκτείνουμε τον V_1 σε unitary $U : H_1 \to H_2$ ώστε $T = U|T|$. Όταν $H_1 = H_2 = \ell^2[n]$ αυτό ισχύει πάντα. Επομένως, κάθε $n \times n$ πίνακας T παραγοντοποιείται σε $T = U|T|$ όπου U unitary.

$\overline{Im(|T|)} = M \qquad \overline{Im(T)} = N$

$V_1 : M \longrightarrow N$ ισομετρία επί (δηλ unitary)

αν συμβεί

$\dim M^{\perp} = \dim N^{\perp}$

$\exists$ unitary

$V_2 : M^{\perp} \longrightarrow N^{\perp}$

ορίζω $U : M \xrightarrow{V_1} N$

$M^{\perp} \xrightarrow{V_2} N^{\perp}$

και $\forall x \in H_1 \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$

ορίζ. $Ux = V_1 x_M + V_2 \underbrace{x_{M^{\perp}}}$

ισομετρία και επί

$\underline{U|T|}x = V_1|T|x + 0 = \underline{Tx} \quad \forall x \in H_1$

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp} : \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^\perp : \quad \underline{x = x_M + x_{M^\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \le 1$.

$(P = P_M)$

$\|Px\|^2 = \|x_M\|^2 \le \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2 \overset{\perp}{=} \|x_M + x_{M^\perp}\|^2 = \|x\|^2$

$\Rightarrow \|Px\| \le \|x\| \quad \forall x \in H$

$\Rightarrow \|P\| \le 1$ μάλιστα $\|P\| = 1$ εκτός αν $M = \{0\}$

γιατί αν $x \in M$ τότε $Px = x$, $\|Px\| = \|x\|$

$(I - P)x = x - x_M = x_{M^\perp}$

$\Rightarrow \underline{(I-P)}$ είναι η ορθή προβολή στον $M^\perp$

άρα $\|I - P\| \le 1$

Επίσης προφ. το $x_M = Px$ είναι το διάνυσμα του M που είναι πλησιέστερο προς το x διότι $\underline{\forall y \in M}$ τότε $(I-P)y = 0$ οπότε $\|x - Px\| = \|(I-P)x\| = \|(I-P)(x-y)\| \le \|x - y\|$

$\Rightarrow \|x - Px\| \le dist(x, M)$

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η orθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp} : \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.*

(β) $(\ker P) \perp (\operatorname{im} P)$. Ξερουμε ότι $\operatorname{Im}(P_M) = M$, $\ker(P_M) = M^{\perp}$

Προβολές

Έστω M κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert H:

$$H = M \oplus M^{\perp}: \quad x = x_M + x_{M^{\perp}}$$

Η ορθή προβολή επί του M:

$$P_M : H \to H : x \to x_M$$

γραμμική και ταυτοδύναμη (δηλ. $P^2 = P$) με $\|P\| \leq 1$.

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P : H \to H$ γραμμική και ταυτοδύναμη απεικόνιση (δηλ. $P^2 = P$). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(α) *Υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του H ώστε $P = P_M$.* $\underset{\Downarrow}{\mathrm{im}(P)}$ $\underset{\Downarrow}{\ker P}$

(β) $(\ker P) \perp (\mathrm{im}\, P)$. Απόδ $\forall x \in M$ ισχύει $x = Px + x - Px = Px + (I-P)x$ άρα $\perp$

$\Downarrow$

(γ) $\|P\| \leq 1$.

$\Rightarrow \|x\|^2 = \|Px + (I-P)x\|^2 \overset{\perp}{=} \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2 \geq \|Px\|^2$

$\Rightarrow \|P\| \leq 1$

(δ) $\Rightarrow$ (α) : $P : H \to H$ $P^2 = P$ και $\|P\| \le 1$

νδο $\exists M$ υπόχωρος του H ώστε $P = P_M$

$M := Im(P)$ νδο είναι κλειστός και ότι $Ker P = M^\perp$

Έστω $x \in (Ker P)^\perp$ παρατηρούμε ότι επειδή ισχύει $(I-P)x \in Ker P$

$\left(P(I-P)x = Px - P^2x = Px - Px = 0 \right)$

οπότε $x \perp (I-P)x$

Άρα $\|x\|^2 + \|(I-P)x\|^2 = \|x - (I-P)x\|^2 = \|Px\|^2 \underset{\|P\| \le 1}{\le} \|x\|^2$

άρα $\|(I-P)x\|^2 = 0$ δηλ $(I-P)x = 0$

άρα $x = Px$ άρα $x \in Im(P) = M$

δείξαμε ότι $(Ker P)^\perp \subseteq M$ Επειδή M είναι Hilbert

να δείξω ισότητα: αν όχι $\exists y \in M \setminus \{0\}$ $y \perp (Ker P)^\perp$

$y \in (\underbrace{Ker P}_{κλειστό})^{\perp\perp} = Ker P$

δείξαμε ότι $M = (Ker P)^\perp$

$y \in M$ και $y \in Ker P$

$y = Px$ αλλά $Py = 0$

οπότε $0 = Py = P(Px) = Px = y$

$\Rightarrow y = 0$ άτοπο

Γιατί είναι ο M κλειστός;

Απάντ. $M = Im P = \{Px : x \in H\}$

$= \{y : (I-P)y = 0\}$

$= Ker(I-P)$: κλειστό διότι $I-P$ συνεχής

$Im P = \{y : \exists x \in H$ τω $y = Px\}$

αν $y = Px$ τότε $(I-P)y = Px - P(Px) = Px - Px = 0$

αντίστροφα αν $y \in Ker P$ τότε $(I-P)y = 0$ άρα $y = Py$

οπότε $y \in Im(P) \Longleftrightarrow y \in Ker(I-P) \Longleftrightarrow y = Py$

Προβολές

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο P είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

(δ) *Ο P είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*

Απόδ. Υπόθ. P είναι ορθή προβολή στο $\operatorname{Im} P$ νδο $P \geq 0$ (

~~$\forall z \in H$ έχω $(I-P)z \in \ker P$ και $Pz \in \operatorname{Im} P$ που είναι κάθετα~~

~~οπότε $\langle Pz, (I-P)z \rangle = 0$ άρα $\langle Pz, z \rangle = \langle Pz, Pz \rangle \geq 0$~~

$\operatorname{Im} P \perp \ker P$

Γενικότερα: $\forall x, y \in H$:

$$\langle Px, y \rangle = \langle Px, Py + (I-P)y \rangle = \langle Px, Py \rangle + \langle Px, (I-P)y \rangle = \langle Px, Py \rangle$$

$$\langle x, Py \rangle = \langle Px + \underbrace{(I-P)x, Py}_{=0} \rangle = \langle Px, Py \rangle$$

(Αποδείξεις των δυο προτάσεων υπάρχουν στο αρχείο prob21.pdf.)

$\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$ άρα $P = P^*$

Θέτω $x = y$ προκύπτει

$\langle Px, x \rangle = \langle Px, Px \rangle \geq 0$ άρα $P \geq 0$

Προβολές

Πρόταση

Έστω H χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(H)$ ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Ο P είναι η ορθή προβολή επί του $\operatorname{im} P$.*

(δ) *Ο P είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.* $P = P^*$ και δηλαδή $P \geq 0$

(ε) *Ο P είναι φυσιολογικός.* $PP^* = P^*P$

Αν $P = P^*$ τότε προφανώς $PP^* = P^*P$

Μένει να δω ότι $PP^* = P^*P$ τότε είναι ορθή προβολή

$$\Downarrow$$

$$\forall x \in H, \ \|Px\| = \|P^*x\| \Rightarrow \ker(P) = \ker(P^*)$$

(Αποδείξεις των δυο προτάσεων υπάρχουν στο αρχείο prob21.pdf.)

Παίρνω $x \in \ker P$, $y = Pz \in \operatorname{Im}(P)$

$$\langle x, y \rangle = \langle x, Pz \rangle = \langle P^*x, z \rangle = 0$$

οπότε $x \perp y$

Δείξαμε ότι $\ker P \perp \operatorname{Im} P$ οπότε P είναι η ορθή προβολή στο $\operatorname{Im} P$

Προβολές

Πρόταση

Έστω H *χώρος Hilbert και* $P \in \mathcal{B}(H)$ *ταυτοδύναμος μη μηδενικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο* P *είναι η ορθή προβολή επί του* $\operatorname{im} P$.

(δ) *Ο* P *είναι αυτοσυζυγής, μάλιστα είναι θετικός.*

(ε) *Ο* P *είναι φυσιολογικός.*

Ένας φραγμένος τελεστής είναι ορθή προβολή αν και μόνον αν είναι ταυτοδύναμος και αυτοσυζυγής.

$P \in \mathcal{B}(H)$ ορθή προβ. $\Longleftrightarrow$ $\underline{P = P^2 = P^*}$

(Αποδείξεις των δυο προτάσεων υπάρχουν στο αρχείο prob21.pdf.)

Προβολές

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

(α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.

(β) Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και $x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I - P)$.

$\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{ P \in \mathcal{B}(H) : P = P^* = P^2 \}$ $\quad$ $\mathcal{S}(\mathcal{H}) = \{ M \subseteq H : M$ κλειστός υπόχωρος του $H \}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{P}(\mathcal{H}) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathcal{H}) \\
P & \longmapsto & \underline{\operatorname{Im} P} \\
P_M & \longleftarrow & M \\
0 & \longmapsto & \{0\} \\
I & \longmapsto & \mathcal{H} \\
P & \longrightarrow & M \\
(I-P) & \longrightarrow & M^\perp
\end{array}$$

αμφιμονοσήμαντη

« διατηρεί » τη διάταξη

$P, Q \in \mathcal{P}(H)$ $\quad$ $P - Q \in \mathcal{B}_h(H)$

$P \geq Q \iff \underline{\operatorname{Im} P \supseteq \operatorname{Im} Q}$

$\langle Px, x \rangle \geq \langle Qx, x \rangle \quad \forall x \in H$

Προβολές

(γ) Έχω $\|Py\|^2 = \|y\|^2 = \|Py + (I-P)y\|^2$
$\overset{\perp}{=} \|Py\|^2 + \|(I-P)y\|^2 \Longrightarrow (I-P)y = 0$
άρα $y = Py$

Χρήσιμες Παρατηρήσεις

(α) Αν $P \in \mathcal{B}(H)$, τότε: P ορθή προβολή $\iff P = P^* = P^2$.

(β) Αν $P = P^2$, τότε $x \in \operatorname{im} P \iff x = Px$ και
$x \in \ker P \iff x \in \operatorname{im}(I-P)$.

(γ) Αν P ορθή προβολή, τότε $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ για κάθε $x \in H$ και
$\boxed{Py = y} \iff \|Py\| = \|y\|$. Αντίστροφα αν $\|Py\| = \|y\|$ (γ)
$\Rightarrow$ προφανές και επειδή $(I-P)y \in \ker P$ άρα $(I-P)y \perp Py$

Πρόταση (Η απεικόνιση $P \to \operatorname{im} P$ διατηρεί τη διάταξη)

Αν P, Q είναι ορθές προβολές, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) $P \leq Q$ (β) $\|Px\| \leq \|Qx\|$ *για κάθε* $x \in H$

(γ) $\operatorname{im} P \subseteq \operatorname{im} Q$ (δ) $QP = P$ (ε) $PQ = P$.

<u>Απόδ.</u> (α) $\Rightarrow$ (β) $\forall x \in H$ έχω $\langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle$ άρα ισχύει η (β)
$\langle Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle$ $\quad \| \quad \|$
$\|Px\|^2 \quad \|Qx\|^2$
$= \langle Px, P^*x\rangle = \langle Px, Px\rangle$
(β) $\Rightarrow$ (γ) αν ισχύει η $\|Px\| \leq \|Qx\|$ $\forall x$ τότε αν $x \in \operatorname{im} P$ τότε $Px = x$
έχω $\|x\| = \|Px\| \leq \|Qx\| \leq \|x\|$

ισομετρία : $\|x\| = \|Qx\| \overset{(\text{πώς})}{\Longrightarrow} x = Qx$ αφού $x \in \operatorname{Im}(Q)$

(γ) $\Longrightarrow$ (δ) $\operatorname{Im}P \subseteq \operatorname{Im}Q$ άρα $\forall x \in H$ έχω $Px \in \operatorname{Im}(P) \subseteq \operatorname{Im}(Q)$

$Q(Px) = Px \Longrightarrow QP = P$

(δ) $\Longrightarrow$ (ε) Αν $QP = P$ τότε $(QP)^* = P^*$ άρα $PQ = P$

(ε) $\Longrightarrow$ (α) Αν $\underline{PQ = P}$ νδο $\|Px\| \leq \|Qx\|$ $\forall x \in H$

Πράγματι, $\forall x$ έχω $Px = PQx$ άρα

$$\|Px\| = \|PQx\| \leq \|P\| \, \|Qx\| \leq \|Qx\| \quad \blacksquare$$