Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

18 Μαρτίου 2022

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E, F)$.
Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach.

Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$. Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$.

Ορισμός

Ο (τοπολογικός) δυικός (dual) E^* ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών $f : E \to \mathbb{K}$, δηλαδή ο $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$. Είναι πάντα χώρος Banach.

Riesz:

$\downarrow$ Hilbert

$f : H \longrightarrow \mathbb{K}$ γραμμ. + συνεχής

$\Downarrow$

$\exists!\, x_f \in H$ τ.ω. $f(y) = \langle y, x_f \rangle \quad \forall y \in H$

$\varphi : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ sesquilinear φραγμ.

$\Updownarrow$

$\exists!\, T_\varphi \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ τ.ω. $\varphi(x, y) = \langle T_\varphi x, y \rangle \quad \forall x \in H_1 \ \forall y \in H_2$

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty.$

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{K}$ είναι γραμμική.
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Παράδειγμα $\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\}.$$

Σημείωση Sesquilinear μορφές ορίζονται βεβαίως σε οποιουσδήποτε $\mathbb{K}$-γραμμικούς χώρους.

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in \mathrm{ball}(H_1), y \in \mathrm{ball}(H_2)\}\end{aligned}$$

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in \mathrm{ball}(H_1), y \in \mathrm{ball}(H_2)\} \end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j\right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \leq 1\right\}$$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη ανν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H. Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \le \|\varphi\| \le 2\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

αν $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ισχύει η ισότητα $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \mathrm{ball}(H)\}$.

... αλλά όχι εν γένει.

Πόρισμα

Έστω H *μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση* $T : H \to H$ *είναι φραγμένη αν και μόνον αν*

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Πόρισμα

Έστω H *μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση* $T : H \to H$ *είναι φραγμένη αν και μόνον αν*

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $T = T^*$, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ *ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *από την σχέση*

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ *ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *από την σχέση*

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{K}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^* y \rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική.

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^*x, y\rangle_1 = \langle x, Ty\rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \tag{*}$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x\rangle_2 \,.$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής?

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x \rangle_2 \,.$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x \rangle_2| \leq C_x \|y\| \; \forall y \in D\}.$$

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\left\langle T^* x, y \right\rangle_1 = \left\langle x, Ty \right\rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \tag{*}$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \left\langle Ty, x \right\rangle_2 .$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\left\langle Ty, x \right\rangle_2| \leq C_x \|y\| \ \forall y \in D\}.$$

(Μπορεί $D_* = \{0\}$). Αν $x \in D_*$, τότε (Riesz) $\exists ! T^* x \in H_1$ ώστε $f_x(y) = \left\langle y, T^* x \right\rangle_1$ για κάθε $y \in H_1$.

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*\,, y \in D\,. \qquad (*)$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x \rangle_2\,.$$

$\cancel{|\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \|y\|}$

$\cancel{\overset{?}{\leq} k \|x\| \|y\|}$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x \rangle_2| \leq C_x \|y\| \ \forall y \in D\}.$$

(Μπορεί $D_* = \{0\}$). Αν $x \in D_*$, τότε (Riesz) $\exists! T^* x \in H_1$ ώστε $f_x(y) = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in H_1$. Οπότε $\langle Ty, x \rangle_2 = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in D$, δηλαδή ισχύει η (*).

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y\rangle_1 = \langle x, Ty\rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \tag{*}$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x\rangle_2 .$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x\rangle_2| \leq C_x \|y\| \ \forall y \in D\}.$$

(Μπορεί $D_* = \{0\}$). Αν $x \in D_*$, τότε (Riesz) $\exists! T^* x \in H_1$ ώστε $f_x(y) = \langle y, T^* x\rangle_1$ για κάθε $y \in H_1$. Οπότε $\langle Ty, x\rangle_2 = \langle y, T^* x\rangle_1$ για κάθε $y \in D$, δηλαδή ισχύει η (*).

Ελέγχω ότι ο D_* είναι γραμμ. υπόχωρος του H_2 και η $x \to T^* x : D_* \to H_1$ γραμμική.

Παρ/δ $H_1 = H_2 = L^2([0,1])$

$D \subseteq H_1$: $D = C^1[0,1]$ $\quad T : D \to L^2 : g \mapsto g'$ (γραμμ. όχι φραγμ.)

$D_* ?$

Πάρε $f \in C^1[0,1]$ και $\underline{f}(0) = 0 = \underline{f}(1)\} = D_1$

$$\langle Tg, f\rangle = \int_0^1 ig'\bar{f} = \int_0^1 (ig\bar{f})' - \int_0^1 gi\bar{f}'$$

$$= \cancel{g(1)\bar{f}(1) - g(0)\bar{f}(0)} + \int_0^1 g(+i\bar{f}')$$

$\Downarrow$

$$|\langle Tg, f\rangle| = \left|\int_0^1 g\bar{f}'\right| \le \|g\|_2 \|f'\|_2 \quad (f' \in C[0,1] \subseteq L^2[0,1])$$

όπως η $\psi_f : g \mapsto \langle Tg, f\rangle$ είναι γρ. φραγμένη στο $\underline{\underline{D}}$

άρα επεκτείνεται σε φραγμ. υποσύνεση στον L^2

(γιατί D πυκνό στο L^2)

όπως από Riesz $\exists\, T^*f \in L^2([0,1])$ ώστε

$$\psi_f(g) = \underset{\sim}{\langle g, T^*f\rangle} \quad \forall g \in L^2 \text{ άρα } \forall g \in D$$

$\shortparallel$

$\underset{\sim}{\langle Tg, f\rangle}$

ορίζεται $T^* : D_1 \to L^2[0,1]$ που ικανοποιεί

$$\langle Tg, f\rangle = \langle g, T^*f\rangle \quad \forall g \in D, \forall f \in D_1$$

Δηλ. $\underset{\sim}{\langle g, T^*f\rangle} = \langle Tg, f\rangle = \int g'\bar{f} = \int g(-\bar{f}') = \underset{\sim}{\langle g, -f'\rangle}$

$\forall g \in D$ όμως D πυκνό στο L^2

$$\Rightarrow \boxed{T^*f = -f' \quad \forall f \in D_1}$$

Παρ/σ Δεν βρήκαμε $\underline{\text{όχι}}$ το D_* αλλά ένα υποσύνολό του

Ο τελεστής της ορμής P (στον $L^2(\mathbb{R})$)

Πάρε για $D = C_c^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ απειρ. παραγωγίσιμη και μηδενίζεται έξω από κάποιο διάστημα $\}$

$$P : D \to L^2(\mathbb{R})$$
$$f \mapsto i\hbar f' \quad \left(\hbar = \frac{\text{σταθ. Planck}}{2\pi} \right)$$

(το ξεχνάτε)

όπως πριν βρίσκω $\forall f, g \in D$

$\langle Pf, g \rangle = \langle f, Pg \rangle$ $\quad P$ «ερμιτιανός»

πχ η ίδια σχέση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες ισχύει

$\forall g \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall f \in \underline{C_c^1(\mathbb{R})} \supsetneq C_c^\infty(\mathbb{R})$

άρα $\quad C_c^1(\mathbb{R}) \subseteq D_*$

άρα ο P δεν είναι αυτοσυζυγής

Θα έπρεπε $P = P^*$ δηλ. $Pf = P^* f \ \forall f \in D_*$

Υπάρχουν όμως αυτοσυζυγείς επεκτάσεις

($\exists$ και μία αυτοσυζυγής επέκταση)

Reed & Simon: Methods of modern Math. Physics, Vol. I Functional Analysis

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, *όπου* H *μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο* T *είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *για κάθε* $x \in H$.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, *όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$, *ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, *όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$, *ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$.
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

T ισομετρία $\Rightarrow$ T είναι 1-1

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $\cancel{T}$ $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2} = A_1^*$$

$$A_2 = \frac{A - A^*}{2i} = A_2^*$$

$$\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}_h(H) + i\mathcal{B}_h(H)$$

$$\mathcal{B}_h(H) \cap i\mathcal{B}_h(H) = \{0\}$$

Γιατί αν $T \in \mathcal{B}_h(H)$ και $iT \in \mathcal{B}_h(H)$ τότε

$$(iT)^* = (iT)$$

$$\parallel$$

$$-iT^* = -iT$$

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.

Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$. $\subseteq \mathcal{B}_h(H)$

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.
Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.
Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.
(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x\rangle \geq \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

<u>Παρατ</u> $\mathcal{B}_h(H)$ είναι $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος
είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H)$
και αν (T_n) από $T_n = T_n^*$ με $T_n \to T$
τότε $T = T^*$ (αφού $T^* = \lim T_n^* = \lim T_n = T$)

Αυτοσυζυγείς και θετικοί τελεστές

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται μοναδικά στην μορφή

$$A = A_1 + iA_2, \quad \text{όπου } A_k = A_k^* \ (k = 1, 2).$$

Ορισμός

(i) Ένας αυτοσυζυγής τελεστής $T \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός (ή θετικά ημιορισμένος) (positive ή positive semidefinite) αν $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$.
Το σύνολο των θετικών τελεστών συμβολίζουμε $\mathcal{B}_+(H)$.
(ii) Αν $T, S \in \mathcal{B}_h(H)$, ορίζουμε $T \geq S$ αν $\langle Tx, x \rangle \geq \langle Sx, x \rangle$ για κάθε $x \in H$, αν δηλαδή $T - S \in \mathcal{B}_+(H)$.

Παρατήρηση: Σε μιγαδικούς χώρους, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ με $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$ είναι αυτομάτως θετικός. αυτοσυζυγής, άρα θετικός
γιατί αφού $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x$ άρα όπως δείξαμε $T = T^*$

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \; \Rightarrow tA \geq 0$.

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \Rightarrow tA \geq 0.$ $\quad \forall x,\ \langle(\lambda A + (1-\lambda)B)x, x\rangle = \lambda\langle Ax, x\rangle + (1-\lambda)\langle Bx, x\rangle \geq 0$
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \Rightarrow A = 0$.

$\forall x \quad \langle Ax, x\rangle \geq 0$ και $\langle -Ax, x\rangle \geq 0$

$\Downarrow$

$\forall x, \quad \langle Ax, x\rangle = 0$ άρα αφού $A = A^*$ έπεται $A = 0$

Ο κώνος των θετικών τελεστών

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \;\Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0,1] \;\Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \;\Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h \;\; \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.

$T = T^*$ ξέρω $\forall x \in H$, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ και

$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\| \langle x, x\rangle$

$$\underbrace{-\|T\|\langle x,x\rangle \leq}\underbrace{\langle Tx,x\rangle \leq \|T\|\langle x,x\rangle}$$

$\langle (T+\|T\|I)x, x\rangle \geq 0$ $\forall x \Longrightarrow T + \|T\| I \geq 0$

$\langle (\|T\|I - T)x, x\rangle \geq 0$ $\forall x \Longrightarrow \|T\| I - T \geq 0$

$-\lambda I \leq T \leq \lambda I \qquad \lambda = \|T\|$ ή ένα μεγαλύτερο

$$T = \frac{(T - \lambda I) - (\lambda I - T)}{2}$$

Παρ/ξ $S: e_n \to e_{n+1}$ δεν είναι αυτοσυζυγής
άρα δεν είναι θετικός

$D_a: \ell^2 \to \ell^2 : e_n \to a_n e_n$ όπου $a=(a_n)\in \ell^\infty$ φραγμένος.
είναι αυτοσυζυγής ανν $a_n\in\mathbb{R}$
θετικός ανν $a_n \geq 0$

$f\in C([0,1])$
$M_f: L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ φραγμένος
αυτοσυζυγής ανν $f(t)\in\mathbb{R}\ \forall t\in\mathbb{R}$
θετικός ανν $f(t)\geq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$

Απόδ $\langle M_f g, g\rangle = \int_0^1 (fg)(t)\overline{g(t)}\,dt = \int f(t)|g(t)|^2 dt$

- Αν $f(t)\in\mathbb{R}\ \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow \langle M_f g,g\rangle\in\mathbb{R}\ \forall g\in L^2 \Rightarrow M_f=M_f^*$
- Αν $f(t)\geq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$ τότε $M_f=M_f^*$
και $\langle M_f g,g\rangle\geq 0\ \forall g\in L^2$
άρα $M_f\geq 0$

Αν $\exists t$ ώστε $f(t)<0$ τότε $\exists$ διάστημα $J\subseteq[0,1]$ και ένα $\delta>0$
ώστε $f(s)<-\delta\ \forall s\in J$
όπως παίρνουμε $g\in L^2$, $g\neq 0$ με $g|_{J^c}=0$ τ.ω. έχω

$$\langle M_f g,g\rangle = \int_J f(t)|g(t)|^2\,dt \leq -\delta\int|g(t)|^2\,dt < 0$$

Δείξαμε ότι $M_f\geq 0 \Longleftrightarrow f\geq 0$
Ομοίως δείχνεται ότι αν $\exists t : f(t)\notin\mathbb{R}$ τότε $\exists g\in L^2$
ώστε $\langle M_f g,g\rangle\notin\mathbb{R}$ άρα $M_f\neq M_f^*$

Παρ/ για τα D_a που έχει πίνακα $\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$

είδαμε ότι αυτοσυζυγής

$\Longleftrightarrow$ ιδιοτιμές του είναι στο $\mathbb{R}$

θετικός

$\Longleftrightarrow$ " " είναι ≥ 0

Πρόταση: Αν H έχει διάσταση $< \infty$.

ασκήσεις

Τότε ένας $A \in B(H)$ είναι αυτοσυζυγής

$\Longleftrightarrow$ διαγωνιοποιείται ως προς μια ο.κ. βάση του H και έχει πραγματικές ιδιοτιμές

$A \in B(H)$ είναι θετικός $\Longleftrightarrow$ είναι αυτοσυζυγής με μη αρνητικές ιδιοτιμές

$\Longleftrightarrow$ θετικά ημιορισμένος

Ο $(\mathcal{B}_h(H), \|\cdot\|)$ είναι $\mathbb{R}$-χώρος Banach. Ο $\mathcal{B}_+(H) \subseteq \mathcal{B}_h(H)$ είναι

- κώνος: $A \geq 0, t \geq 0 \;\Rightarrow tA \geq 0$.
- κυρτός: $A, B \geq 0, \lambda \in [0,1] \;\Rightarrow \lambda A + (1-\lambda)B \geq 0$
- γνήσιος: $A \geq 0$ και $-A \geq 0 \;\Rightarrow A = 0$.
- παράγει τον $\mathcal{B}_h(H)$ (full cone): $\forall T \in \mathcal{B}_h \;\; \exists A, B \geq 0 : T = A - B$.
- $\|\cdot\|$-κλειστός.

(A_n) ακ/ία $\mathcal{B}(H)$ με $A_n \geq 0$ $\forall n$
και $A_n \longrightarrow A \in \mathcal{B}(H)$ τότε
$\forall x \quad \underbrace{\langle A_n x, x\rangle}_{\geq 0} \longrightarrow \langle Ax, x\rangle$
$\Longrightarrow \langle Ax, x\rangle \geq 0$
άρα $A \geq 0$

[Προσ. δεν χρειάζεται η σύγκλιση $A_n \longrightarrow A$ να είναι
$\|A_n - A\| \longrightarrow 0$
Αρκεί $\|A_n x - Ax\|_H \longrightarrow 0 \quad \forall x \in H$
μάλιστα αρκεί $\langle A_n x, y\rangle \longrightarrow \langle Ax, y\rangle \quad \forall x, y \in H$]

μερική

Με άλλα λόγια:

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$

$$\text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B, \, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

γιατι θα επρεπε $AB = (AB)^*$

αλλα $B^*A^* = BA$

<u>αναγκαια</u> συνθηκη

$AB = BA$

θα δειξουμε οτι ειναι και ικανη

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} A \geq B,\, S \geq T &\Rightarrow A + S \geq B + T \\ \text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 &\Rightarrow \lambda A \geq \mu B. \end{aligned}$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$A \geq B,\, S \geq T \Rightarrow A + S \geq B + T$$
$$\text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A \geq \mu B.$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

Αν $A = A^*$ τότε $-\|A\|I \leq A \leq \|A\|I$

άρα $A = (A + \|A\|I) - \|A\|I$ (διαφορά δύο θετικών)

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Με άλλα λόγια:
Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$ είναι συμβιβαστή με την γραμμική του δομή, δηλαδή (αν $A, B, S, T \in \mathcal{B}_h$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} A \geq B,\, S \geq T &\Rightarrow A + S \geq B + T \\ \text{και} \quad \lambda \geq \mu \geq 0 &\Rightarrow \lambda A \geq \mu B. \end{aligned}$$

Δεν είναι όμως αλήθεια ότι αν $A \geq 0$ και $B \geq 0$ τότε $AB \geq 0$.

Επίσης, αν $T_n \geq 0$ και $\|T_n - T\| \to 0$, τότε ο T είναι θετικός.

$$\begin{aligned} \text{Αν } A = A^* \text{ τότε } & -\|A\|I \leq A \leq \|A\|I \\ \text{άρα } & A = (A + \|A\|I) - \|A\|I \quad \text{(διαφορά δύο θετικών)} \end{aligned}$$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ *θετικός τελεστής. Τότε για κάθε* $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \text{και} \quad \overset{(ii)}{\|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle}.$$

Κοιτάω την $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$, $\varphi(x,y) = \langle Bx, y\rangle$

- sesquilinear
- ερμιτιανή: $\varphi(y,x) = \langle By, x\rangle \underset{B=B^*}{=} \langle y, Bx\rangle = \overline{\langle Bx, y\rangle} = \overline{\varphi(x,y)}$
- θετικά ημιορισμένη: $\varphi(x,x) = \langle Bx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x$

$\Longrightarrow$ Cauchy-Schwarz: $|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y)$

(ii): $\|Bx\|^4 = \langle Bx, Bx\rangle^2 = |\langle Bx, y\rangle|^2$ όπου $y = Bx$

$$\leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle$$
$$= \langle Bx, x\rangle\langle B^2x, Bx\rangle$$
$$\leq \langle Bx, x\rangle\,\|B^2x\|\,\|Bx\|$$
$$\leq \langle Bx, x\rangle\,\|B\|\,\|Bx\|\,\|Bx\|$$

$\Longrightarrow \|Bx\|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\,\|B\|$ ∎

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ *θετικός τελεστής. Τότε για κάθε* $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

ανν $\forall x,\ \langle B_n x, x\rangle \leq \langle B_{n+1} x, x\rangle$ και $\exists M : \langle B_n x, x\rangle \leq M$

Έστω (B_n) *αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών.*
Τότε η (B_n) *συγκλίνει κατά σημείο:*

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\| \langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία *αυτοσυζυγών τελεστών.*
Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο:

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \text{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle. \quad (*)$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$.

<u>Απόδ.</u> Ονομάζω $M = \sup_n \|B_n\|$

$\forall x$, $m \geq n$ έχω $\langle B_m x, x\rangle \geq \langle B_n x, x\rangle$

$\iff \langle (B_m - B_n)x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x$

άρα $B_m - B_n \geq 0 \quad \forall m \geq n$

Εφαρμόζω $(*)$ για $B = B_m - B_n$

a_m

$\forall x$, $\|(B_m - B_n)x\|^2 \leq \|B_m - B_n\| \langle (B_m - B_n)x, x\rangle \leq 2M(\langle B_m x, x\rangle - \langle B_n x, x\rangle)$

(a_n) στο $\mathbb{R}$ είναι αύξουσα και άνω φραγμ. (από $M\|x\|^2$)

άρα (Απειρ I) συγκλίνει

οπότε αν πάρουμε δοθέν $\varepsilon>0$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall\, m\geq n\geq n_0$

να είναι $|a_m-a_n|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$

οπότε $\|B_m x-B_n x\|^2<\varepsilon \quad \forall\, m\geq n\geq n_0$

δηλ. η ακολουθία $(B_n x)$ είναι βασική στο H : πλήρης

$\Longrightarrow \exists!\, z_x\in H$ ώστε $B_n x\longrightarrow z_x$

$$z_x=\|\cdot\|_H-\lim B_n x$$

Έχω ορίσει τελεστή: $Y: H\longrightarrow H : x\longmapsto z_x$

Ο Y ικανοποιεί?

(i) γραμμικός (κατά σημείο όριο γραμμικών)

$$Y(x_1+\lambda x_2)=\lim B_n(x_1+\lambda x_2)$$
$$=\lim(B_n x_1+\lambda B_n x_2)$$
$$=Y(x_1)+\lambda Y(x_2) \qquad \|B_n x\|\leq M\|x\|$$

(ii) Y φραγμ. διότι $\forall x,\ \|Yx\|=\lim_n\|B_n x\|$
$\leq M\|x\|$

επομ. Y φραγμ., $\|Y\|\leq M$

(iii) $Y=Y^*$: κατά σημείο όριο αυτοσυζυγών

$\forall x,y\in H \quad \langle Y^*x,y\rangle=\langle x,Yy\rangle=\lim\langle x,B_n y\rangle$
$=\lim\langle B_n x,y\rangle=\langle Yx,y\rangle$

$B_n=B_n^*$

$Y^*=Y$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \text{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$. Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$. " "$Y = \sup B_n$" "

Μοναδικότητα: αν $Z \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $Zx = \lim B_n x$ $\forall x$ τότε προφανώς $Zx = Yx$ $\forall x$ άρα $Z = Y$

όμως, $\forall x$ $\langle B_n x, x\rangle \nearrow$ οπότε $\langle Yx, x\rangle = \lim \langle B_n x, x\rangle \geq \langle B_m x, x\rangle$ $\Longrightarrow Y \geq B_m$ $\forall m$

Επίσης, αν $C = C^* \in \mathcal{B}(H)$ με $C \geq B_n \ \forall n$

τότε $\forall x$: $\langle Cx, x\rangle \geq \langle B_n x, x\rangle \quad \forall n$

$\Downarrow$

$\langle Cx, x\rangle \geq \lim_n \langle B_n x, x\rangle$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \langle Yx, x\rangle$

$\langle (C-Y)x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x$

H μοναδικότητα

είναι $C - Y \geq 0$ δηλ. $C \geq Y$

<u>Πόρισμα</u> $T \in \mathcal{B}(H) \rightsquigarrow \varphi_T$ sesqui + φραγμ. $\rightsquigarrow \hat{\varphi}_T$ τετραγωνική μορφή

$\langle Tx, y\rangle = \varphi_T(x,y) \quad \forall x, y \in H$

$\hat{\varphi}_T(x) = \langle Tx, x\rangle \quad \forall x \in H$

$T = T^* \iff \hat{\varphi}_T(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$

$T \geq 0 \iff \hat{\varphi}_T(x) \geq 0 \quad \forall x \in H$

$\Updownarrow$

φ_T είναι θετικό ημιεσωτερικό γινόμενο

δηλ. ημι-εσωτερικό γινόμενο

$B_n \in \mathcal{B}_h(H)$

$(B_n) \nearrow$ και φραγμένη $\rightsquigarrow$ $a_n = \hat{\varphi}_{B_n}(x) = \langle B_n x, x\rangle$

αύξουσα + φραγμ.

Θέτω $a = a_n = \lim_n \langle B_n x, x\rangle$

είναι όντως μια τετραγωνική μορφή;

να ελέγξω αν $a = \hat{\varphi}_Y$ για κάποιον $Y \in \mathcal{B}(H)$

$a_n = \langle B_n x, x\rangle$ συγκλίνει $\forall x \in H$ έπεται από polarization

$\downarrow$ ότι η $\langle B_n x, y\rangle$ $\forall x,y \in H$

$a_x = \lim \langle B_n x, x\rangle$ συγκλίνει :

γιατί $4\langle B_n x, y\rangle = a_n(x+y) - a_n(x-y) + i\,a_n(x+iy) - i\,a_n(x-iy)$

άρα $\exists \lim_n \langle B_n x, y\rangle := \varphi(x,y)$

προφανώς η φ είναι sesquilinear

και επίσης $|\varphi(x,y)| = \lim_n |\langle B_n x, y\rangle| \le M \|x\| \|y\|$

άρα φ είναι φραγμένη !

άρα $\exists! \, Y \in B(H)$ ώστε $\varphi(x,y) = \langle Yx, y\rangle$ $\forall x,y \in H$

<u>δηλαδή</u> $\langle Yx, y\rangle = \langle B_n x, y\rangle$ " "

<u>ΔΕΝ</u> ξέρω ότι $Yx = \lim B_n x$ $\forall x$

δηλ. ότι $\|Yx - B_n x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

αλλά μόνο $|\langle Yx - B_n x, y\rangle| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall x,y$

Η διάταξη $\geq$ στον $\mathcal{B}_h(H)$

Λήμμα (Γενικευμένη ανισότητα Cauchy - Schwarz)

Έστω $B \in \mathcal{B}(H)$ θετικός τελεστής. Τότε για κάθε $x, y \in H$,

$$|\langle Bx, y\rangle|^2 \leq \langle Bx, x\rangle\langle By, y\rangle \quad \textit{και} \quad \|Bx\|^2 \leq \|B\|\,\langle Bx, x\rangle.$$

Πρόταση

Έστω (B_n) αύξουσα και φραγμένη ακολουθία αυτοσυζυγών τελεστών. Τότε η (B_n) συγκλίνει κατά σημείο: Υπάρχει μοναδικός αυτοσυζυγής τελεστής Y ώστε $Yx = \lim_n B_n x$ για κάθε $x \in H$.
Επιπλέον $B_n \leq Y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν C είναι αυτοσυζυγής τελεστής ώστε $B_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y \leq C$.

Παρατήρηση Προφανώς το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει για φθίνουσες φραγμένες ακολουθίες αυτοσυζυγών τελεστών.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ *υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$*. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ *υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$. *Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ *υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $X^2 = A$. *Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του* A *και συμβολίζεται* $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ *μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον* A.

Ύπαρξη τετραγωνικής ρίζας

Πρόταση

Για κάθε θετικό τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ υπάρχει μοναδικός θετικός τελεστής $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^2 = A$. Ο τελεστής αυτός λέγεται τετραγωνική ρίζα του A και συμβολίζεται $A^{1/2}$.
Ο $A^{1/2}$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.

Πόρισμα

Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, τότε ο AB είναι θετικός αν και μόνον αν $AB = BA$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^{\perp}$ είναι ισομετρία.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$.

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^{\perp}$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία* V *με αρχικό χώρο* $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ *και τελικό χώρο* $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ *ώστε*

$$T = V|T|.$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία* V *με αρχικό χώρο* $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ *και τελικό χώρο* $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ *ώστε*

$$T = V|T|.$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \to Tx$ και να επεκτείνεις...