Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

15 Μαρτίου 2022

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Ο Χώρος των Τελεστών

Ορισμός

Αν $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ είναι χώροι με νόρμα, ονομάζουμε $\mathcal{B}(E, F)$ το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων

$$T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|).$$

Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{B}(E)$ αντί για $\mathcal{B}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S) : x \to Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{B}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to \|T\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(E, F)$.
Αν επί πλέον ο F είναι πλήρης, ο $\mathcal{B}(E, F)$ είναι χώρος Banach.

$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \leq 1\} < +\infty$

Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(T\circ S)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$. Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$.

$(\mathcal{B}(E), +, \cdot, \circ)$ δρ χώρ + δακτ → άλγεβρα

$\forall T, S \in \mathcal{B}(E) \Rightarrow TS = T\circ S$: συνεχής

$\forall x \in E$, $\|TS(x)\| = \|T(Sx)\| \leq \|T\|\,\|Sx\| \leq \|T\|\cdot\|S\|\,\|x\|$

$\forall x \in ball(E)$ $\|TS(x)\| \leq \|T\|\|S\|$

sup ως προς x $\|TS\| \leq \|T\|\cdot\|S\|$ ✓

→ $T_n \to T$, $S_n \to S$ $\Rightarrow$ $\|T_nS_n - TS\| \to 0$ δείξε

$$\|T_nS_n - TS\| = \|T_n(S_n - S) + T_nS - TS\|$$
$$\leq \|T_n(S_n-S)\| + \|(T_n - T)S\|$$
$$\leq \underbrace{\|T_n\|}_{\to \|T\|}\,\underbrace{\|S_n - S\|}_{\to 0} + \underbrace{\|T_n - T\|}_{\to 0}\,\underbrace{\|S\|}_{\to \|S\|}$$

$\| \| \geq SOT \geq WOT$

= =

αν $\dim H < +\infty$

SOT: $T_i \xrightarrow{SOT} T$ ⇔ $\|T_ix - Tx\| \to 0$ $\forall x \in H_1$

WOT: $T_i \xrightarrow{WOT} T$ ⇔ $\langle T_ix, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ $\forall x \in H_1, \forall y \in H_2$

$\mathcal{B}(E) \times \mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(E)$ συνεχής

$(T, S) \mapsto TS$

Ο Χώρος των Τελεστών

Όταν $E = F$, ο $\mathcal{B}(E)$ γίνεται (μη μεταθετική, αν $\dim E > 1$) άλγεβρα ως προς τη σύνθεση: $(TS)(x) = T(S(x))$ $(x \in E)$. Μάλιστα $\|TS\| \leq \|T\| \, \|S\|$.

Ορισμός

Ο (τοπολογικός) δυικός (dual) E^* ενός χώρου με νόρμα είναι ο χώρος όλων των συνεχών γραμμικών μορφών $f : E \to \mathbb{K}$, δηλαδή ο $\mathcal{B}(E, \mathbb{K})$.
Είναι πάντα χώρος Banach.

πλήρης

H_i: Hilbert

$T \in \mathcal{B}(H_1, H_2) \rightsquigarrow \varphi_T : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{K}$

$(x, y) \longmapsto \langle Tx, y \rangle_{H_2}$

T, S με $\varphi_T = \varphi_S$ τότε $T = S$

$\Updownarrow$

$\langle Tx, y \rangle = \langle Sx, y \rangle$ $\forall y \in H_2$ $\forall x \in H_1$

$\Downarrow$

$Tx = Sx$ $\forall x \in H_1$

$\Downarrow$

$T = S$

Μπορώ να "ανακατασκευάσω" τον T από τα "δεδομένα"

$\{ \varphi_T(x, y) : x \in H_1, y \in H_2 \}$

$\rightsquigarrow$ να βρω τον T

Π.χ. σε χώρους πεπ. διάστ. $\{e_j\}$ για H_1, $\{f_i\}$ για H_2

$\varphi_T(e_j, f_i) = \langle Te_j, f_i \rangle$ $\forall i, j$

$\rightsquigarrow$ έχω τον πίνακα A_T $\Longleftarrow$ ορίζεται ο T

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x,y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x,y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x,y)| : \|x\|_{H_1} \leq 1, \|y\|_{H_2} \leq 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Sesquilinear μορφές

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
Μια sesquilinear μορφή λέγεται φραγμένη, αν επιπλέον έχει την ιδιότητα
(iii) $\sup\{|\phi(x, y)| : \|x\|_{H_1} \le 1, \|y\|_{H_2} \le 1\} := \|\phi\| < +\infty$.

Παράδειγμα $\phi(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ όπου $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.
Μάλιστα $\|T\| = \|\phi\|$, δηλαδή

$$\|T\| = \overbrace{\sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|_{H_1} \le 1, \|y\|_{H_2} \le 1\}}^{\|\varphi\|}.$$

απόδ. $\forall x \in \text{ball}(H_1)$ $\forall y \in \text{ball } H_2$ έχω

$$|\varphi_T(x,y)| = |\langle Tx, y\rangle| \underset{CS}{\le} \|Tx\|\,\|y\| \underset{\|T\|}{\le} \|T\|\,\underbrace{\|x\|\,\|y\|}_{\le 1}$$

πάρε sup ~~ως προς x~~, y : (δεν χρειάζεται)

$\|\varphi_T\| \le \|T\|$

Αντίστροφα, $\forall x \in H_1$

$\|Tx\|_{H_2} = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : y \in ball(H_2)\}$

και δίνεται $|\langle Tx, y\rangle| \le \|Tx\|$

για αυτό αν $Tx \neq 0$ παίρνουμε: $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$

όπου $|\langle Tx, y\rangle| = |\langle Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\rangle| = \|Tx\|$

οπότε $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in ball(H_1)\}$

$\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, y\rangle| : x \in ball(H_1), y \in ball(H_2)\}$

$= \|\varphi_T\|$

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in \mathrm{ball}(H_1), y \in \mathrm{ball}(H_2)\} \end{aligned}$$

Η νόρμα τελεστή

Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$,

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\|_2 : x \in H_1, \|x\|_1 \leq 1\} \\ &= \sup\{|\langle Tx, y\rangle_2| : x \in \text{ball}(H_1), y \in \text{ball}(H_2)\} \end{aligned}$$

Αν $\dim H_1 = m$, $\dim H_2 = n$ με ΟΚ βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ και $\{f_1, \dots, f_n\}$ και $a_{ij} = \langle Te_j, f_i\rangle$ έχουμε

$$\|T\| = \sup\left\{\left|\sum_{i,j} y_i a_{ij} x_j\right| : \sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \leq 1, \sum_{i1}^{n} |y_i|^2 \leq 1\right\}$$

$$|\langle Tx, y\rangle| = |\langle T(\textstyle\sum_j x_j e_j), \sum_i y_i f_i\rangle|$$

$$= |\textstyle\sum_{i,j} x_j \bar{y}_i \langle Te_j, f_i\rangle| = |\sum_{ij} x_j \bar{y}_i a_{ij}|$$

$$\|T\| = \sup\left\{ |\textstyle\sum_{ij} x_j a_{ij} \bar{y}_i| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 ;\ \sum |x_j|^2 \leq 1, \sum |y_i|^2 \leq 1 \right\}$$

αντί για $y = \sum y_i f_i$

$y' = \sum \bar{y}_i f_i$ $\quad \|y'\| = \|y\| = \sum |y_i|^2$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

$$\hat\varphi(x+y) = \varphi(x+y, x+y) = \cancel{\varphi(x,x)} + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \cancel{\varphi(y,y)}$$

$$\hat\varphi(x-y) = \qquad = \quad - \quad - \quad +$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat\varphi(x+y) - \hat\varphi(x-y) = 2\varphi(x,y) + 2\varphi(y,x)}$$

$$\hat\varphi(x+iy) \qquad = \varphi(x,x) + \varphi(x,iy) + \varphi(iy,x) + \varphi(iy,iy)$$

$$= \varphi(x,x) - i\varphi(x,y) + i\varphi(y,x) + \varphi(y,y)$$

$$\hat\varphi(x-iy) \qquad = \varphi(x,x) + i\varphi(x,y) - i\varphi(y,x) + \varphi(x,y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x+iy) - \varphi(x-iy) = -2i\varphi(x,y) + 2i\varphi(y,x)$$

$$\Rightarrow \boxed{i\varphi(x+iy) - i\varphi(x-iy) = 2\varphi(x,y) - 2\varphi(y,x)}$$

$$\frac{1}{4}\left(\hat\varphi(x+y) - \hat\varphi(x-y) + i\hat\varphi(x+iy) - i\hat\varphi(x-iy)\right) = \cancel{4}\varphi(x,y)$$

$$\hat\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat\varphi\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat\varphi\left(\frac{x-iy}{2}\right) = \varphi(x,y)$$

Ειδικότερα, αν $\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle$ τότε

$$4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$$

Πρόταση Αν μια $\|\ \|$ ικανοποιεί τον κανόνα $/\!/$

δηλ. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x,y$

Τότε $\exists! \langle\cdot,\cdot\rangle$ στο χώρο ώστε $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$

Απόδ. Εύκολη στοιχειώδης, αλλά μακροσκελής

$$\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle \quad \forall n\in\mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle qx,y\rangle = q\langle x,y\rangle \quad \forall q\in\mathbb{Q}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle tx,y\rangle = t\langle x,y\rangle \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Αλλά $\langle ix,y\rangle = i\langle x,y\rangle$

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

όταν $\in\mathbb{R}$ $\quad \in\mathbb{R} \quad \in\mathbb{R} \quad \in\mathbb{R}$

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

$\operatorname{Re}\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) \to |\operatorname{Re}\varphi(x,y)| \leq \|\hat{\varphi}\|\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)$

Πρόταση

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια sesquilinear μορφή φ είναι φραγμένη ανν η $\hat{\varphi}$ είναι φραγμένη στη μπάλα του H. Μάλιστα

$$\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \operatorname{ball}(H)\} \leq \|\varphi\| \leq 2\sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \operatorname{ball}(H)\}.$$

αν $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$, τότε ισχύει η ισότητα $\|\varphi\| = \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \operatorname{ball}(H)\}$.

... αλλά όχι εν γένει. $\quad \forall x, \ \hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x) \leq \|\varphi\| \, \|x\| \, \|x\|$

$\Downarrow$

$|\hat{\varphi}(x)| \leq \|\varphi\| \quad \forall x \in \operatorname{ball} H$

$$\Rightarrow \|\hat{\varphi}\| := \sup\{|\hat{\varphi}(x)| : x \in \text{ball } H\} \le \|\varphi\|$$

$\forall x,y \in \text{ball } H$:

$$|4\varphi(x,y)| \le \sum_{n=0}^{3} |i^n \hat{\varphi}(x+i^n y)| = \sum |\hat{\varphi}(x+i^n y)|$$

$$\le \|\hat{\varphi}\| \left(\|x+y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x-iy\|^2\right)$$

$$= \|\hat{\varphi}\| \left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 + 2\|iy\|^2\right)$$

$$= \|\hat{\varphi}\| \left(4\|x\|^2 + 4\|y\|^2\right) \le 8\|\hat{\varphi}\|$$

$$|\varphi(x,y)| \le 2\|\hat{\varphi}\| \quad \forall x,y \in \text{ball}(H)$$

$$\Longrightarrow \|\varphi\| \le 2\|\hat{\varphi}\|$$

Στην ειδική περίπτωση που $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ $\forall x \in H$ έχω:

$$|\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \le \|\hat{\varphi}\| \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)$$

$$= \frac{\|\hat{\varphi}\|}{4} \left(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\right) = \frac{\|\hat{\varphi}\|}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$|\mathrm{Re}\,\varphi(x,y)| \le \|\hat{\varphi}\| \quad \forall x,y \in \text{ball}(H)$$

Όταν $\varphi(x,y) = e^{i\theta}|\varphi(x,y)| \Longrightarrow |\varphi(x,y)| = e^{-i\theta}\varphi(x,y) = \varphi(x, e^{i\theta}y) \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(x,y)| = |\mathrm{Re}(\varphi(x, e^{i\theta}y))| \le \|\hat{\varphi}\| \underbrace{\|x\|}_{\le 1} \underbrace{\|e^{i\theta}y\|}_{= \|y\| \le 1}$$

$$|\varphi(x,y)| \le \|\hat{\varphi}\|$$

sup ως προς x,y $\Longrightarrow \|\varphi\| \le \|\hat{\varphi}\|$ άρα ισότητα.

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

διότι $= \|\hat{\varphi}_T\|$ όπως στο $\|\hat{\varphi}_T\| < +\infty$ και

$\|\varphi\| \leq 2\|\hat{\varphi}_T\| < +\infty$

$\|\varphi\| = \|T\|$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Πόρισμα

Έστω H *μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση* $T : H \to H$ *είναι φραγμένη αν και μόνον αν*

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

δηλαδή (πολικότητα): $\langle Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle$ $\forall x, y \in H$

Παρ Δεν ισχύουν αυτά σε πραγμ. χώρους Hilbert

πχ στο $(\mathbb{R}^2, \langle\, ,\, \rangle)$

παίρνω την T: στροφή κατά $\pi/2$

$\forall x, \langle Tx, x\rangle = 0$ όμως $T \neq 0$

Sesquilinear μορφές και τελεστές

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T : H \to H$ είναι φραγμένη αν και μόνον αν

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Τότε

$$\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\} \leq \|T\| \leq 2\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

Επίσης, αν $T, S \in \mathcal{B}(H)$, τότε $T = S$ αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle = \langle Sx, x\rangle$ για κάθε $x \in H$.

Πόρισμα

Έστω H μιγαδικός χώρος Hilbert και $T : H \to H$ φραγμένη γραμμική απεικόνιση. Αν $T = T^*$, τότε $\varphi_T(x,x) = \langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \overline{\langle T^*x, x\rangle} = \overline{\langle Tx, x\rangle}$

$$\longrightarrow \quad \|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathrm{ball}(H)\}.$$

άρα $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ $\forall x$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x,y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

<u>Αρχικά</u> Σταθ. $x \in H_1$, να βρω $Tx \in H_2$ ώστε...

Θεωρώ το $H_2 \to \mathbb{K}$, $y \longmapsto \phi(x,y)$ είναι αντιγραμμική

Θεωρώ το $f_x : H_2 \to \mathbb{K}$, $y \longmapsto \overline{\phi(x,y)}$ <u>είναι</u> γραμμική μορφή

ϕ φραγμ.

είναι και φραγμ.:

$|f_x(y)| = |\overline{\phi(x,y)}| = |\phi(x,y)| \leq \|\phi\| \|x\| \|y\|$

sup στη ball(H_2): $\|f_x\| \leq \|\phi\| \|x\|$

Επειδή ο H_2 είναι <u>πλήρης</u> από το <u>θ. Riesz</u> $\exists ! \, z_x \in H_2$ ώστε $f_x(y) = \langle y, z_x \rangle \quad \forall y \in H_2$

$$\overline{\varphi(x,y)} = \langle y, z_x\rangle \quad \forall y \in H_2$$

$$\varphi(x,y) = \langle z_x, y\rangle \quad " \quad (*)$$

$\forall x \in H_1 \ \exists!\ z_x \in H_2$ t.c. $(*)$

esiste una mappa : $T: H_1 \longrightarrow H_2 : x \longmapsto z_x$ t.c. $(*)$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle z_x, y\rangle = \varphi(x,y) \quad \forall x \in H_1,\ \forall y \in H_2$$

Tale mappa è unica

• T lineare: $x_1, x_2 \in H_1$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$T(x_1 + \lambda x_2) \overset{?}{=} Tx_1 + \lambda T x_2$$

$$\iff \langle T(x_1+\lambda x_2), y\rangle = \langle Tx_1 + \lambda Tx_2, y\rangle \quad \forall y \in H_2$$

$$\iff \underbrace{\langle T(x_1+\lambda x_2), y\rangle}_{} \overset{\text{def}}{=} \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) \underset{\text{sesquil.}}{=} \varphi(x_1,y) + \lambda \varphi(x_2,y) = \underbrace{\langle Tx_1, y\rangle + \lambda \langle Tx_2, y\rangle}_{\forall y}$$

quindi T lineare

• T limitato: $|\langle Tx, y\rangle| = |\varphi(x,y)| \le \|\varphi\| \|x\| \|y\|$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup\{|\langle Tx,y\rangle| : x \in \text{ball}(H_1),\ y \in \text{ball}(H_2)\} \le \|\varphi\|.$$

$\blacksquare$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 *χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή* $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ *ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή* $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *από την σχέση*

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Sesquilinear μορφές

Θεώρημα

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert. Κάθε φραγμένη sesquilinear μορφή $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ ορίζει έναν μοναδικό φραγμένο τελεστή $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ από την σχέση

$$\phi(x, y) = \langle Tx, y \rangle \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Έπεται το

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1} \qquad \text{για κάθε } x \in H_1, y \in H_2.$$

Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Αποδ. Η $\phi(y, x) := \langle y, Tx \rangle_{H_2}$ είναι sesquilinear και φραγμένη.

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. (π.χ. $D = C^1([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$

$Tf = f'$ ($Tf = if'$)

Αν T φραγ., επεκτείνεται σε $\tilde{T} : H_1 \to H_2$ οπότε ορίζεται ο $\tilde{T}^*$

Τι γίνεται όταν T όχι συνεχής

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y\rangle_1 = \langle x, Ty\rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$\underline{\underline{f_x}} : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x\rangle_2 .$$

καλά ορισμένη ($y \in D$)
και γραμμική

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? π.χ. για $x=0$

f_x συνεχής $\iff$ φραγμ. ανή $\iff$ $\exists C_x : |f_x(y)| \le C_x \|y\|$ $\forall y \in D$

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y\rangle_1 = \langle x, Ty\rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x\rangle_2 .$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x\rangle_2| \leq C_x \|y\| \ \forall y \in D\}.$$

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x \rangle_2 .$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x \rangle_2| \leq C_x \|y\| \ \forall y \in D\}.$$

$\tilde{f}_x : H_1 \to \mathbb{C}$

η f_x συνεχής, άρα επεκτείνεται σε $\tilde{f}_x$ συνεχή

(Μπορεί $D_* = \{0\}$). Αν $x \in D_*$, τότε (Riesz) $\exists! T^* x \in H_1$ ώστε $f_x(y) = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in H_1$.

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \qquad (*)$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x \rangle_2 \,.$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x \rangle_2| \le C_x \|y\| \; \forall y \in D\}.$$

(Μπορεί $D_* = \{0\}$). Αν $x \in D_*$, τότε (Riesz) $\exists! T^* x \in H_1$ ώστε $f_x(y) = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in H_1$. Οπότε $\langle Ty, x \rangle_2 = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in D$, δηλαδή ισχύει η (*).

Ο συζυγής μη φραγμένου τελεστή

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert και $D \subseteq H_1$ πυκνός γραμμικός υπόχωρος και $T : D \to H_2$ γραμμική. Να βρούμε (αν $\exists$) γραμμ. υπόχωρο $D_* \subseteq H_2$ και γραμμ. απεικόνιση $T^* : D_* \to H_1$ ώστε

$$\langle T^* x, y \rangle_1 = \langle x, Ty \rangle_2 \quad \text{για κάθε } x \in D_*, y \in D. \tag{*}$$

Έστω $x \in H_2$. Θεωρώ τη γραμμική μορφή

$$f_x : D \to \mathbb{C} : y \to \langle Ty, x \rangle_2 .$$

Για ποιά $x \in H_2$ είναι συνεχής? Αυτά: Ορίζω

$$D_* := \{x \in H_2 : \exists C_x : |\langle Ty, x \rangle_2| \le C_x \|y\| \ \forall y \in D\}.$$

(Μπορεί $D_* = \{0\}$). Αν $x \in D_*$, τότε (Riesz) $\exists! T^* x \in H_1$ ώστε $f_x(y) = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in H_1$. Οπότε $\langle Ty, x \rangle_2 = \langle y, T^* x \rangle_1$ για κάθε $y \in D$, δηλαδή ισχύει η (*).

Ελέγχω ότι ο D_* είναι γραμμ. υπόχωρος του H_2 και η $x \to T^* x : D_* \to H_1$ γραμμική.

Πρόβλ. $D = C^1([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$

Εδώ ο T^* ορίζεται τουλάχιστον στο D

$Tf = f'$

Ισχ. $D \subseteq D^*$ δηλ.

$\forall f \in C^1([0,1])$ η γραμμική μορφή

$D \longrightarrow \mathbb{C}$

$g \longmapsto \langle g, Tf \rangle$ είναι συνεχής ως προς την $\| \; \|_2$

ας υποθέσω να αποδείξω ότι

Απόδ. $\langle g, Tf \rangle = \langle g, f' \rangle$

$= \int g(t) \overline{f'(t)}\, dt \qquad \int_0^1 g'(t) f(t)\, dt -$

$(g\bar{f})' = g'\bar{f} + g\bar{f}'$ δηλ. $g\bar{f}' = (g\bar{f})' - g'\bar{f}$

$\Rightarrow \langle g, Tf \rangle = \int (g\bar{f})'(t)\,dt - \int g'(t)\bar{f}(t)\,dt$

$= g(1)\bar{f}(1) - g(0)\bar{f}(0) - \int g'\bar{f}$

$|\langle g, Tf \rangle| \leq |g(1)\bar{f}(1) - g(0)\bar{f}(0)| + \|g'\|_2 \, \|f\|_2 \quad ? \; ? \; ?$

(την άλλη φορά)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.

(σαν τις συναρτήσεις) παρ/γ $f \in C([a,b])$ και ορίζω

$M_f : L^2 \longrightarrow L^2 : g \longmapsto fg$

και $M_f^* = M_{\bar f}$ οπότε

$M_f^* M_f = M_{\bar f} M_f = M_{\bar f f}$

$M_f M_f^* = M_f M_{\bar f} = M_{f \bar f}$

παρ/γ $S : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to \ell^2(\mathbb{Z}_+)$

$e_n \longrightarrow e_{n+1}$

$S^* : e_n \longrightarrow \begin{cases} e_{n-1}, & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

$S^*S = I$ $\quad SS^*(e_0) = 0$

οπότε $S^*S \neq SS^*$

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις) π.χ. $M_f = M_f^*$ όταν $f = \bar{f}$ σ.π. δηλ. $f(t) \in \mathbb{R}$ σ.π.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. Ειδικότερα αν $H_1 = H_2$
κάθε unitary είναι φυσιολογικός

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.

(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)

(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:

Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.

Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.

Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t. (στα f συνεχής)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν
$T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι
ορθομοναδιαίος. (ασκηση)

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)
(iii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν $T^*T = I_{H_1}$ και $TT^* = I_{H_2}$. (σαν τις συναρτήσεις που $|f(t)| = 1$)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Κατηγορίες τελεστών

$\|T\| = \|T^*\|$ ισχύει πάντα

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Απόδ. $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle$ $\forall x$ όπως αν $TT^* = T^*T$

$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle$ άρα $\|Tx\| = \|T^*x\|$ $\forall x$

Αντίστροφα αν έχει ισότητα $\forall x$ άρα (polarization) έχω $\langle T^*Tx, y\rangle = \langle TT^*x, y\rangle$ $\forall x, y \in H$

$\Downarrow$

$T^*T = TT^*$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, *όπου* H *μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο* T *είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *για κάθε* $x \in H$.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Απόδ. Αν $T = T^*$ τότε $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$

άρα $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$

Αντίστροφα αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ $\forall x$ τότε $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Downarrow$ πολωτική

$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $\forall x, y \in H$

$\|$ ορ T^*

$= \langle T^*x, y\rangle$

$T = T^* \Leftarrow$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι φυσιολογικός αν και μόνον αν $\|Tx\| = \|T^*x\|$ για κάθε $x \in H$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$.

Γράφω $\mathcal{B}_h(H) = \{T \in \mathcal{B}(H), T = T^*\}$.

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$, όπου H μιγαδικός χώρος Hilbert. Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε

$$\underbrace{\|T\|}_{\|\varphi_T\|} = \underbrace{\sup\{|\langle Tx}_{\|\hat{\varphi}_T\|}, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}.$$

είναι ίσα επειδή $\varphi_T(x,x) \in \mathbb{R}$ $\forall x$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε
(i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.

<u>Απόδ</u> Ισομετρία $\iff \|Tx\|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in H_1$

$\iff \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, x\rangle$ '' $\quad \forall x \in H_1, \forall y \in H_1$

(πόλωση) $\iff \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in H_1$

$\iff \langle T^*Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle$

$\iff T^*T = I_{H_1}$

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε
(i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.
(ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

T ισομετρία $\Rightarrow T^*T = I_{H_1}$ (οπότε είναι 1-1)

αν επιπλέον T επί τότε είναι αντιστρέψιμος, οπότε $\exists\, T^{-1}: H_2 \to H_1$ με $T^{-1}T = I_{H_1}$, $TT^{-1} = I_{H_2}$

$T^*T = I_{H_1} = T^{-1}T$ και ο T είναι επί

οπότε $\forall y \in H_2\ \exists x \in H_1$ με $y = Tx$

οπότε $T^*y = T^*Tx = T^{-1}Tx = T^{-1}y \Rightarrow T^* = T^{-1}$ οπότε έχω $TT^* = I_{H_2}$

άρα T είναι ορθομοναδιαίος

Αντίστροφα αν ο T είναι ορθομοναδιαίος τότε οι σχέσεις $T^*T = I_{H_1}$ ($\Rightarrow$ ισομετρία) και $TT^* = I_{H_2}$

δείχνουν ότι ο T είναι αντιστρέψιμος με $T^{-1} = T^*$ άρα επιπλέον T είναι επί

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$*.*
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, όπου H_i μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε
(i) Ο T είναι ισομετρία αν και μόνον αν $T^*T = I_{H_1}$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H_1$.
(ii) Ο T είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, *όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
(i) Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$, *ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$.
(ii) Ο T *είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνον αν είναι ισομετρία και επί.*

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί.
Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_0 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).
Ο τελεστής $M : H^2 \to H^2$ όπου $(Mf)(z) = zf(z),\ f \in H^2$ είναι ισομετρία, όχι επί (άσκηση).