Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

13/05/2022

Μάϊος 2022

Στόχος: Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^{\perp}$.*

Στόχος: Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^{\perp}$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^{\perp}$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Στόχος: Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Στόχος: Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής και φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο* $(\ker A)^{\perp}$.

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^{\perp}$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^{\perp}$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^{\perp} \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \mathrm{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

$$A \underset{U}{\sim} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad(\ker A)^{\perp} \quad & \ker A \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} a(1) & & & \\ & a(2) & & 0 \\ & & \ddots & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \to E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή (eigenvalue) της A αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) της A

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \to E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή (eigenvalue) της A αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) της A

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Ορισμός

Έστω E γραμμικός χώρος, $A : E \to E$ γραμμική απεικόνιση. Ένας (μιγαδικός) αριθμός λ λέγεται ιδιοτιμή (eigenvalue) της A αν υπάρχει μη μηδενικό $x \in E$ ώστε $Ax = \lambda x$. Το x λέγεται ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) της A και το σύνολο

$$M_\lambda := \{x \in E : Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I)$$

(που είναι προφανώς γραμμικός χώρος) είναι ο ιδιόχωρος (eigenspace) της A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο των ιδιοτιμών της A συμβολίζουμε $\sigma_p(A)$. = σημειακό φάσμα της A

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

$\underline{x \in M_\lambda}$, $BA = AB \Rightarrow Bx \in M_\lambda$

$A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda(Bx)$.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \to E$ έχει ιδιοτιμές. $\lambda \in \sigma_p(A) \iff \det(A - \lambda I) = 0$

↑ πολυώνυμο ως προς λ $\Rightarrow$ έχει ρίζα

(Θεμ. Θεώρ. της Άλγ.)

$\mathbb{C}$: αλγεβρικά κλειστό σώμα

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \to E$ έχει ιδιοτιμές.
Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους. Πχ $E = \mathbb{R}^2$, $A =$ στροφή κατά $\pi/2 \simeq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
δεν έχει κανένα ιδιοδιάνυσμα

Παρατηρήσεις:

(i) Κάθε ιδιόχωρος M_λ της A είναι αναλλοίωτος από την A, δηλαδή $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$, και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.
Μάλιστα ο M_λ είναι αναλλοίωτος και από κάθε γραμμική απεικόνιση B που *μετατίθεται με την* A.

(ii) Αν ο E είναι χώρος με νόρμα και η A είναι συνεχής, κάθε ιδιόχωρος M_λ είναι κλειστός υπόχωρος του E, γιατί $M_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}(\{0\})$.

(iii) Αν ο E είναι (μη μηδενικός) μιγαδικός χώρος και $\dim E = n < +\infty$, κάθε γραμμική απεικόνιση $A : E \to E$ έχει ιδιοτιμές.
Αυτό φυσικά δεν αληθεύει πάντα σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους.
Σε απειροδιάστατους μιγαδικούς χώρους;

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.

Γενίκευση: $a = (a_n)$ ~~...~~ φραγμ. ακολουθία από $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\forall n$

Ορίζω $T_a : e_n \to a_n e_{n+1}$

$T_a := S D_a : e_n \xrightarrow{D_a} a_n e_n \xrightarrow{S} a_n e_{n+1}$

$Tx = \lambda x$

$T : (x(0), x(1), x(2), \dots) \longrightarrow (a_0 x(0), a_1 x(1), a_2 x(2), \dots)$

$\longrightarrow (0, a_0 x(0), a_1 x(1), \dots)$

$\lambda x = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), \dots)$

$Tx = \lambda x :$ $\lambda x(0) = 0$ (0), $\lambda x(1) = a_0 x(0)$ (1), $\lambda x(2) = a_1 x(1)$ (2), $\vdots$

αν $\lambda = 0$ $(a_n \neq 0) \Rightarrow x(n) = 0$ $\forall n$, άρα $x = 0$ άτοπο

αν $\lambda \neq 0$: $x(0) = 0$

(1) : $\lambda x(1) = 0 \Rightarrow x(1) = 0$

(2) : $\lambda x(2) = 0 \Rightarrow x(2) = 0$

$\vdots$

Άρα $x = 0$ άτοπο

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές. ✓

Αν $a_n \neq 0$ $\forall n$ ο τελεστής

$T_a = S D_a$ δεν έχει καμμία ιδιοτιμή

$a_n = 1 \ \forall n$ → S δεν έχει ιδιοτιμές

$a_n \to 0$ τότε D_a συμπαγής → T_a συμπαγής χωρίς ιδιοτιμές

<u>Όμως</u> $S^* : e_0 \to 0, \ e_n \to e_{n-1} \ \forall n > 0$

$$S^* x = \lambda x \iff S^* x = (x(1), x(2), x(3), \dots) = \lambda x = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), \dots)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x(1) = \lambda x(0) \\ x(2) = \lambda x(1) = \lambda^2 x(0) \\ x(3) = \lambda x(2) = \lambda^3 x(0) \end{array}\right\} \Rightarrow x = x(0)\underline{(1, \lambda, \lambda^2, \dots)}$$

άρα πρέπει $x \neq 0$: $x(0) \neq 0$

πρέπει $x \in \ell^2$: $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^n|^2 < \infty \iff |\lambda| < 1$

$\forall \lambda \in \mathbb{D}$ το $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$

Είναι ιδιοδιάνυσμα του S^* με ιδιοτιμή λ

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}\,(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.
Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ δεν είναι κάθετα.

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές. Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος. Απόδ. ν.δ.ο. $\overline{\mathrm{span}}\{x_\lambda : |\lambda|<1\} = \ell^2$

$\Longleftrightarrow$ αν $x \perp x_\lambda$ $\forall \lambda \in \mathbb{D}$ τότε $x = 0$

$x = (x(0), x(1), \dots)$

$\langle x_\lambda, x \rangle = 0 \quad \forall \lambda$

δηλ. $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \overline{x(k)} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}$

$\underline{f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{x(k)} \lambda^k}$: δυναμοσειρά που συγκλίνει $\forall \lambda \in \mathbb{D}$

και $f(\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{D}$

$\Longrightarrow f \equiv 0$ δηλ. οι συντελεστές $\overline{x(k)} = 0 \quad \forall k$

$\Longrightarrow x = 0$

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.
Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

$= \{x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty\}$

(β) Στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ θεωρούμε τον τελεστή $U : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ο U δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο U^* έχει ιδιοτιμές.

$Ux = \lambda x$?

$x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e_n$

$Ux = \sum x(n) e_{n+1} = \sum x(n-1) e_n$

$\lambda x = \sum \lambda x(n) e_n$

$Ux = \lambda x \iff x(n-1) = \lambda x(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\dots = \lambda^{-2} x(-2) = \lambda^{-1} x(-1) = x(0) = \lambda x(1) = \lambda^2 x(2) \dots$

$\iff x(k) = \lambda^{-k} x(0) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$\cdot\ x(0) = 0 \Rightarrow x(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ άτοπο

- $x(0) \neq 0$! πρέπει $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\lambda^{-k} x(0)|^2 < \infty$

ειδικότερα $\sum_{k=0}^{\infty} |\lambda^{-k}|^2 < \infty$

$\Rightarrow |\lambda^{-1}| < 1 \Rightarrow |\lambda| > 1$ $\Big\}$ άτοπο

όμως πρέπει και $\sum_{n>0}^{\infty} |\lambda^{n} x(0)|^2 < \infty$ πρέπει: $|\lambda| < 1$

1εξ Δείξτε ο U^* έχει ιδιοτιμές

διότι αν $\exists\, x \neq 0$ και $\exists \lambda \in \mathbb{C}$: $U^* x = \lambda x$

$$\Updownarrow$$

$$U U^* x = \lambda U x$$

$$x = \lambda U x$$

άρα $x \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow U x = \frac{1}{\lambda} x$

όπως $\frac{1}{\lambda} \in \sigma_p(U)$ άτοπο

όπως ο U είναι ένας φυσιολογικός τελεστής

$(U U^* = U^* U)$

χωρίς ιδιοτιμές

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή $S : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές. Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: $\sigma_p(S^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

(β) Στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ θεωρούμε τον τελεστή $U : e_n \mapsto e_{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ο U δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο U^* έχει ιδιοτιμές.

(γ) Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή M με $(Mf)(t) = tf(t)$ $(f \in C([0,1]))$. Ο M δεν έχει ιδιοτιμές. (Ασκ.) Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable) αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = (a(n))$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable) αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = (a(n))$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = (a(n))$ φραγμένη και

$$A = U^{-1} D_a U : \qquad A \overset{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \to \ell^2 : x_n \to e_n$ είναι unitary.

$\forall n, \quad Ax_n = a(n)x_n$

$\Downarrow$

$\|A\| \|x_n\| \geq \|Ax_n\| = |a(n)|$

$\Downarrow$

$\forall n, \ |a(n)| \leq \|A\|$ άρα $a \in \ell^\infty$

μάλιστα $\|a\|_\infty \leq \|A\|$

Επίσης από $Ax_n = a(n)\, x(n)$

έχω $\|A\| = \sup |a(n)| = \|a\|_\infty$

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Ένας τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται διαγωνοποιήσιμος (diagonalizable) αν υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H και μια ακολουθία $a = (a(n))$ μιγαδικών αριθμών ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $a = (a(n))$ φραγμένη και

$$A = U^{-1} D_a U : \qquad A \overset{u}{\sim} D_a$$

όπου $U : H \to \ell^2 : x_n \to e_n$ είναι unitary. Άρα

$$\text{διαγωνοποιήσιμος} \Rightarrow \text{φυσιολογικός}.$$

$$AA^* = (U^{-1} D_a U)(U^{-1} D_a U)^*$$

$$= U^* D_a \underbrace{U (U^*}_{I} D_a^* U) = U^* D_a D_a^* U$$

$$= U^* D_a D_{\bar a} U$$

$$= U^* D_{a\bar a} U$$

$$A^* A$$

$$\|$$

$$U^* D_a^* U U^* D_a U = U^* D_a^* D_a U = U^* D_{\bar a a} U$$

Διαγωνοποιήσιμοι τελεστές

Πρόταση

Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, $A \in \mathcal{B}(H)$. Ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνον αν οι ιδιόχωροι του είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H.

$Ax_n = \text{ει}(\omega)\lambda x_n$ $\quad \forall n : P_n = \text{proj}(M_{\lambda_n})$

Το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών ενός διαγωνοποιήσιμου τελεστή είναι (πεπερασμένο ή) αριθμήσιμο. Αν $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και P_n είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_n που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_n, τότε για κάθε $x \in H$

$x \in H$:

$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n x$ (όπου περατς)

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

$\Downarrow$ $Ax = A(\sum_n P_n x) = \sum_n A P_n x$ // όπου $P_n x \in M_{\lambda_n}$ άρα $AP_n x = \lambda_n P_n x$

(όπου το άθροισμα συγκλίνει (αν είναι άπειρο) ως προς τη νόρμα του H).

Απόδ $A : H \to H$ διαγ, έστω A διαγωνοποιήσιμος

$\Rightarrow \exists\, U : H \to \ell^2$ ώστε $A = \underline{U^* D_a U}$ όπου $a = (a(n)) \in \ell^\infty$

$\forall \lambda$, $\{n : a(n) = \lambda\}$

$M_\lambda = \overline{\text{span}}\{e_n : a(n) = \lambda\}$

Είναι ο ιδιόχωρος του D_a που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

γιατί $\forall n$ τ.ω. $a(n) = \lambda$ έχω

$D_a e_n = a(n) e_n = \lambda e_n$ άρα $e_n \in M_\lambda$

$M_\lambda \supseteq \overline{\text{span}}\{e_n : a(n) = \lambda\}$

αντίστροφα: άσκηση

$\Rightarrow$ ο ιδιόχωρος του A της ιδιοτιμής λ

$= \overline{\text{span}}\{x_n : a(n) = \lambda\}$

και οι ιδιόχωροι του A είναι ανά δύο κάθετοι

αφού αν $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$ τότε

$\{n \in \mathbb{N} : a(n) = \lambda\} \cap \{n \in \mathbb{N} : a(n) = \mu\} = \emptyset$

$\Rightarrow M_\lambda \perp M_\mu$ (αφού περιέχονται από ξένα σύνολα $\{x_n\}$)

και η γραμμ. θήκη της $\bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} M_\lambda$ περιέχει όλα τα $\{x_n\}$ $\Longrightarrow$ άρα είναι πυκνή

Αντίστροφα, υποθέτω ότι οι υπόχωροι $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι

$\perp$ ανά δύο και παράγουν τον H οπότε οι προβολές

$\{P_n\}$ ικανοποιούν $P_n P_m = 0$ για $n \neq m$ ($M_n \perp M_m$)

και επίσης $\forall x \in H$ γράφεται

$$x = \sum P_n x$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = \sum \lambda_n P_n x$$

οπότε αν $\forall n$ θεωρήσω $\{x_{n,i} : i \in \mathbb{N}\}$ για να βάση του M_n

τότε (ι) η ένωση $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_{n,i} : i \in \mathbb{N}\} = \mathcal{B}$

είναι ο.κ. ορθοκανονική, και

επειδή $x \neq 0$ δεν υπάρχει

να είναι $\perp$ σ' αυτό

γιατί θα ήταν $\perp$ σε κάθε M_n

άρα $\perp H$

(ιι) $\mathcal{B}$) οπότε είναι ο.κ. βάση του H

Αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A

και $A x_{ni} = \lambda_n x_{ni} \ \forall n, \forall i$

άρα A διαγωνοποιείται ως προς την $\mathcal{B}$.

Ένα παράδειγμα

Έστω g συνεχής συνάρτηση, 2π-περιοδική, $H = L^2([0, 2\pi])$, $T : H \to H : f \mapsto Tf$ όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$$

(ολοκληρωτικός τελεστής).

Ένα παράδειγμα

Έστω g συνεχής συνάρτηση, 2π-περιοδική, $H = L^2([0, 2\pi])$,
$T : H \to H : f \mapsto Tf$ όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y) f(y) dy$$

(ολοκληρωτικός τελεστής). Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n) f_n \ \ (n \in \mathbb{Z}).$$

Ένα παράδειγμα

Έστω g συνεχής συνάρτηση, 2π-περιοδική, $H = L^2([0,2\pi])$,
$T : H \to H : f \mapsto Tf$ όπου

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)dy$$

(ολοκληρωτικός τελεστής). Παρατήρηση: Αν $f_n(x) = e^{inx}$ βρίσκω

$$Tf_n = \hat{g}(n)f_n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Δηλαδή, ως προς την οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, ο T διαγωνοποιήθηκε!

$$T \sim \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \hat{g}(-1) & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \hat{g}(0) & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & \hat{g}(1) & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2([0,2\pi])$.

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος,

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T *σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ *είναι διαγωνοποιήσιμος,*

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T *σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ *είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ *του* $\mathcal{H}$ *και* $a(k) \in \mathbb{C}$ *ώστε* $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \dots, n)$.

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T *σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ *είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ *του* $\mathcal{H}$ *και* $a(k) \in \mathbb{C}$ *ώστε* $Te_k = a_k e_k \ (k = 1, \dots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T *είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή,*

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T *σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ *είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ *του* $\mathcal{H}$ *και* $a(k) \in \mathbb{C}$ *ώστε* $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \dots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T *είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής* $U : \mathcal{H} \to \ell^2([n])$ *ώστε ο* UTU^{-1} *να είναι διαγώνιος.*

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \dots, n\}$ του $\mathcal{H}$ και $a(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \dots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \to \ell^2([n])$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Λήμμα

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathcal{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.

<u>Αποδ</u> $T^*x - \bar\lambda x \stackrel{?}{=} 0$ <u>αφού</u> $T - \lambda I$ είναι φ/σ

$\|T^*x - \bar\lambda x\| = \|(T-\lambda I)^* x\| \stackrel{?}{=} \|(T-\lambda I)x\| = 0$

$(T-\lambda I)^*(T-\lambda I) = (T^* - \bar\lambda I)(T-\lambda I) = T^*T - \lambda T^* - \bar\lambda T + |\lambda|^2 I = TT^* - \lambda T^* - \bar\lambda T + |\lambda|^2 I$
$= (T-\lambda I)(T-\lambda I)^*$

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ διάστασης $n < \infty$ είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ του $\mathcal{H}$ και $a(k) \in \mathbb{C}$ ώστε $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής $U : \mathcal{H} \to \ell^2([n])$ ώστε ο UTU^{-1} να είναι διαγώνιος.

Λήμμα

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in \mathcal{H}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ, τότε $T^*x = \bar{\lambda}x$.

Το (mini) Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα

Κάθε φυσιολογικός τελεστής T *σε έναν (μιγαδικό) χώρο Hilbert* $\mathcal{H}$ *διάστασης* $n < \infty$ *είναι διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή υπάρχει ορθοκανονική βάση* $\{e_k : k = 1, \ldots, n\}$ *του* $\mathcal{H}$ *και* $a(k) \in \mathbb{C}$ *ώστε* $Te_k = a_k e_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.
Ισοδύναμα, ο T *είναι ορθομοναδιαία ισοδύναμος (unitarily equivalent) με έναν διαγώνιο τελεστή, δηλαδή υπάρχει ορθομοναδιαίος τελεστής* $U : \mathcal{H} \to \ell^2([n])$ *ώστε ο* UTU^{-1} *να είναι διαγώνιος.*

Λήμμα

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *φυσιολογικός τελεστής. Αν* $x \in \mathcal{H}$ *είναι ιδιοδιάνυσμα του* T *με ιδιοτιμή* λ, *τότε* $T^*x = \bar{\lambda}x$.
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Απόδ. $TT^* = T^*T$ έστω $\lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ με $\lambda \neq \mu$

$x \in M_\lambda$, $y \in M_\mu$ ν.δ.ο. $x \perp y$

διότι $Ty = \mu y$
$\overset{A}{\Rightarrow} T^* y = \bar{\mu} y$

$$\lambda \langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx,y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \bar{\mu} y\rangle$$
$$= \langle x,y\rangle \mu \Longrightarrow \langle x,y\rangle = 0$$

ν.δ.ο. M_λ ανάγει τον T

. Έχουμε $T(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

και από (A) $(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

άρα $T^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$

$\Rightarrow$ M_λ ανάγει τον T και πινακίδια μορφής

$$\begin{array}{cc} M_\lambda & M_\lambda^\perp \end{array}$$
$$T = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

Απόδ. Θεωρ. Θέτω $T \in \mathcal{B}(H)$ φυσικός και υποθέτω $\dim H = n < +\infty$

. Το $p(\lambda) = \det(T - \lambda I)$ είναι πολυώνυμο ως προς λ

άρα έχει ρίζα $\lambda \in \mathbb{C}$: $\ker(T - \lambda I) = M_\lambda$ είναι μη τετριμμένο διότι $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ $\exists x \in H$, $x \neq 0$ και $Tx = \lambda x$ μπορεί.

$\dim H < +\infty$!

Από το Λήμμα, $\forall \lambda, \mu \in \sigma_p(T)$ οι $M_\lambda \perp M_\mu$ και είναι ανάγουν τον T και T^*

$TT^* = T^*T \Rightarrow$

$\Rightarrow$ οι υπόχωροι $H_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(T)} M_\lambda \subseteq H$

(πρώτα το $\sigma_p(T)$ είναι αριθμήσιμο έχει το πολύ αριθμήσιμα στοιχεία)

λόγω H_0 είναι αναλλοίωτος από τον T και T^*

$\Rightarrow$ $H_0^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος

Έστω ότι $H_0^\perp \neq \{0\}$: Θεωρώ $A = T|_{H_0^\perp} \in \mathcal{B}(H_0^\perp)$ συμπαγής κανονικός

έχει ένα τελεστή σε χώρο Hilbert

άρα $\exists\, x \in H_0^\perp,\ x \neq 0,\ \exists\, \lambda \in \mathbb{C}$!

$$\left.\begin{array}{l} Ax = \lambda x \\ \ \ \| \\ Tx \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$$

άρα το $x \in M_\lambda \subseteq H_0$

άτοπο γιατί $x \in H_0^\perp$

δηλαδή $H_0^\perp = \{0\}$

άρα $H_0 = \bigoplus M_\lambda = H$

άρα ο T διαγωνοποιήσιμος

Πάμε τώρα σε απειροδιάστατο χώρο!

Έστω $K \in \mathcal{K}(H)$. Πώς διαγωνοποιείται;

· αναγκαία συνθήκη: να έχει ιδιοτιμές

($\underline{\text{πχ}}$ T ο shift δεν έχει και ο →

$\underline{\text{πχ}}$ $Te_n = \frac{1}{n} e_{n+1}$

συμπαγής χωρίς ιδιοτιμές)

· αναγκαία συνθήκη: να είναι φυσιολογικός

· Θέλουμε να δείξουμε ότι $\forall$ συμπαγής + φυσιολογικός $\underline{\text{έχει}}$ ιδιοτιμές

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $K = K^* \in \mathcal{K}(H)$ $\underline{K \neq 0}$

$\underline{\text{Τότε}}$ ξέρουμε ήδη

$$\|K\| = \sup\{ |\langle Kx, x\rangle| : x \in \text{ball}\, H\}$$

άρα $\exists$ ακολουθία $\{x_n\}$ με $\|x_n\| = 1$ (γιατί;)

και $|\langle Kx_n, x_n\rangle| \longrightarrow \|K\| \neq 0$

Η $\{\langle Kx_n, x_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμ. $\subseteq \mathbb{R}$

άρα έχει υπακολουθία που συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

$\lambda_n = \langle K x_{m_n}, x_{m_n} \rangle \longrightarrow \lambda \neq 0$ διότι $|\lambda| = \|K\|$

Επιπλέον αν $\|K x_{m_n} - \lambda x_{m_n}\|$

--> $\geq \langle (K-\lambda) x_{m_n}, x_{m_n} \rangle = \langle K x_{m_n}, x_{m_n} \rangle - \lambda \to 0$

Λάθος!

άρα $\|(K - \lambda I) x_{m_n}\| \to 0$

και άρα $K - \lambda I$ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο

~~οπότε ν $\left(\frac{K}{\lambda} - I\right)$ " " " "~~

Επειδή ο $K - \lambda I$ δεν είναι 1-1

(Εναλλακτικά θ. Fredholm: αν K συμπαγής και $\lambda \neq 0$ τότε ή $K - \lambda I$ είναι 1-1 ή ο $K - \lambda I$ έχει φραγμ. αντίστροφο)

άρα ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του K

Πόρισμα Αν $K = K^* \in \mathcal{K}(H)$ τότε $\exists$ ιδιοτιμή λ του K με $|\lambda| = \|K\|$ ($\exists x$ με $Kx = \lambda x$ κλπ)

Άρα $\exists x \in H$ που "μεγιστοποιεί" το K υπό την έννοια: $\|Kx\| = \|K\| \|x\|$

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(**Υπενθύμιση.** Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \operatorname{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής). Περιοριζόμαστε στο $(\ker A)^\perp$ που είναι

<u>Απόδ.</u> Υποθέτω αρχικά ότι ο $A = A^* \in \mathcal{K}(H)$ $(A \neq 0)$ <u>Ήδη</u>
A είδαμε τώρα ότι $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ συγκεκριμένα $\exists\, \lambda \in \sigma_p(A)$
με $|\lambda| = \|A\|$
Επομένως το $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\} \neq \emptyset$
Από το Λήμμα, αν $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$ τότε $M_\lambda \perp M_\mu$
και είναι αναλλοίωτοι από τον A
όπου Θέτουμε $H_0 = \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p(A)} M_\lambda$ (= ορθογώνιο

υπόθεση όπως και H να περιέχει $\forall M_\lambda$)

$A(H_0) \subseteq H_0$

και συμμετρικός ($A = A^*$) $A(H_0^\perp) \subseteq H_0^\perp$

Θέλω νδο $H_0 = H$

Αν όχι, θεωρώ $B = A|_{H_0^\perp} \in \mathcal{B}(H_0^\perp)$

προφανώς ο B είναι συμπαγής

και επίσης είναι αυτοσυζυγής διότι

$\forall x \in H_0^\perp \quad \langle Bx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ διότι $A = A^*$

οπότε $B = B^*$ (υποθέτω H μιγαδικός χώρος)

οπότε έχω ένα συμπαγή αυτοσυζυγή τελεστή B σε ένα χώρο Hilbert $H_0^\perp \neq \{0\}$

Από το θεώρημα ο B έχει ιδιοτιμή λ

δηλ. $\exists x \in H_0^\perp$, $x \neq 0$ ώστε $Bx = \lambda x$

άρα $Ax = \lambda x$ άρα $x \in M_\lambda \subseteq H_0$

Άτοπο