Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

Περιεχόμενα

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \mathrm{im}\, T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\mathrm{rank}(T) = n$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \operatorname{im} T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\operatorname{rank}(T) = n$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \operatorname{im} T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\operatorname{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \operatorname{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \operatorname{im} T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\operatorname{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \operatorname{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $T(\hat{B}_E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται **συμπαγής (compact)** αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.

Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Αν $T \in \mathcal{F}(E,F)$

$T(\hat{B}_E) \subseteq$ φραγμ. υποσ. χώρου πεπερ. διάστασης

($\leq$ rank(T))

όπως η κλειστή του θήκη

συμπαγής

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.
Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Παράδειγμα

Αν $a = (a_n) \in c_0$, ο τελεστής $D_a = \mathrm{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

$D_a(x(1), x(2), --) = (a_1 x(1), a_2 x(2), ---)$

$a_n \to 0 \implies D_a \in \mathcal{K}(\ell^2)$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό

(πρδγ: Άσκηση!) <u>Πχ</u> D_a ℓ^2 $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F).$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F).$$

$\neq$ $\neq$ πχ P : άπειρο διάστατη προβολή

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

πχ Diag $c_n = 1/n$

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F).$$

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F).$$

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) *μετρικός χώρος και* $K \subseteq X$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).*

<u>δηλ.</u> Αν μου δώσετε <u>τυχαίο</u> ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{V_i : i \in I\}$ του K! $K = \bigcup_{i \in I} V_i$

μπορώ <u>εγώ</u> να βρω ένα υποσύνολο του $\underline{\underline{\mathcal{U}}}$ πεπερασμένο ώστε να είναι επίσης κάλυμμα

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) *μετρικός χώρος και* $K \subseteq X$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το* K *είναι συμπαγές (δηλ. ο* $(K, \rho|_K)$ *είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο* A *του* K *έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο* K.

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) *μετρικός χώρος και* $K \subseteq X$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Το* K *είναι συμπαγές (δηλ. ο* $(K, \rho|_K)$ *είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο* A *του* K *έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο* K.
3. *Το* K *είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο* K *έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο* K*).*

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K.*
3. *Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).*
4. *Ο $(K, \rho|_K)$ είναι ολικά φραγμένος (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) και πλήρης.*

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K.*
3. *Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).*
4. *Ο $(K,\rho|_K)$ είναι ολικά φραγμένος (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) και πλήρης.*

Υπενθύμιση: Χαρακτηρισμοί συμπαγούς μετρ. χώρου

Θεώρημα

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subseteq X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Το K είναι συμπαγές (δηλ. ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής χώρος).*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του K έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο K.*
3. *Το K είναι ακολουθιακά συμπαγές (δηλ. κάθε ακολουθία στο K έχει υπακολουθία που συγκλίνει μέσα στο K).*
4. *Ο $(K, \rho|_K)$ είναι ολικά φραγμένος (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$ ο K καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπάλες ακτίνας $\varepsilon > 0$) και πλήρης.*

Παρατήρηση Σε πλήρη μετρ. χώρο X, ένα $A \subseteq X$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλ. $\overline{A}$ συμπαγές) ανν είναι ολικά φραγμένο.

<u>Απόδ.</u> $\overline{A}$ συμπαγές $\Rightarrow$ είναι ολικά φραγμένο $\Longrightarrow$ A ολικά φρ.

α) A ολικά φραγμένο ν.δ.ο. $\bar{A}$ συμπαγές $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}$ πλήρες ✓ : υπόθεση ($\subseteq X$: πλήρης)

$\bar{A}$ ολ. φραγμ.

Αρκεί ν.δ.ο. $\bar{A}$ ολικά φραγμ.

Απόδ. Έστω $\varepsilon>0$. Το A είναι ολ. φραγμ.

$\Longrightarrow$ $\exists\, y_1, \dots, y_n \in A$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon/2)$

Ισχ. $\bar{A} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(y_k, \varepsilon)$

γιατί $\forall\, x \in \bar{A}$ $\exists\, y \in A$: $\rho(x,y) < \varepsilon/2$

όμως $\exists\, k \in [n]$: $\rho(y, y_k) < \varepsilon/2$

$\Longrightarrow$ $\rho(x, y_k) \le \rho(x,y) + \rho(y, y_k) < \varepsilon$

$x \in B(y_k, \varepsilon)$

Συμπαγείς Τελεστές

Θεώρημα

Έστω E, F *χώροι Banach,* $T : E \to F$ *γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T *είναι συμπαγής.*

Συμπαγείς Τελεστές

Θεώρημα

Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $\overline{T(A)}$ είναι συμπαγές.

__Απόδ.__ $A \subseteq E$ φραγμ. $\exists\, \hat{B}(0,\rho) : A \subseteq \hat{B}(0,\rho) = \rho\, \hat{B}(0,1) = \rho\, \hat{B}_E$

$\Downarrow$

$T(A) \subseteq T(\rho \hat{B}_E) = \rho\, T(\hat{B}_E)$

T συμπ: $\overline{T(\hat{B}_E)}$ συμπαγές

$\overline{T(A)} \subseteq \rho\, \overline{T(\hat{B}_E)}$: συμπαγές

Θεώρημα

Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $\overline{T(A)}$ είναι συμπαγές.

(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E, η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>Απόδ</u> Θέτω $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ φραγμ. $\Rightarrow$ $\overline{T(A)}$ συμπαγές

όμως $\{Tx_n\} \subseteq \overline{T(A)}$

και άρα η $\{Tx_n\}$ έχει συγκλίνουσα

υπακολουθία

Συμπαγείς Τελεστές

Θεώρημα

Έστω E, F χώροι Banach, $T : E \to F$ γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε φραγμένο υποσύνολο $A \subseteq E$, το $\overline{T(A)}$ είναι συμπαγές.

(iii) Για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{x_n\}$ του E, η ακολουθία $\{Tx_n\}$ έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία.

(iv) Το σύνολο $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμένο.

Απόδ. ΜΕ ΑΤΟΠΟ: $T(B_E)$ όχι ολ. φραγμ. $\exists\, \varepsilon > 0$ ώστε $T(B_E)$ να μην καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος μπαλών ακτίνας ε

- Οπότε παίρνω $x_1 \in B_E$. Τότε η $B(Tx_1, \varepsilon)$ δεν καλύπτει το $T(B_E)$ άρα $\exists\, x_2 \in B_E$ ώστε $Tx_2 \notin B(Tx_1, \varepsilon)$: $\|Tx_2 - Tx_1\| \geq \varepsilon$
- $B(Tx_1, \varepsilon) \cup B(Tx_2, \varepsilon)$ δεν καλύπτει το $T(B_E)$
  $\exists\, x_3 \in B_E$ ώστε $Tx_3 \notin B(Tx_1, \varepsilon) \cup B(Tx_2, \varepsilon)$
  $\Rightarrow \|Tx_3 - Tx_1\| \geq \varepsilon$ και $\|Tx_3 - Tx_2\| \geq \varepsilon$

.... (επαγωγή): υπάρχει $\{x_n\}$: $\|x_n\| \leq 1$, $\in B_E$ ώστε $\|Tx_n - Tx_m\| \geq \varepsilon$ $\forall n \neq m$ (*)

(*) (Tx_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

(iv) $\Rightarrow$ (i): Υποθέτω ότι το $T(B_E)$ είναι ολικά φραγμ. ✓

νδο $T \in \mathcal{K}(E,F)$ δηλ. $\overline{T(\hat{B}_E)}$ συμπαγές $\Longleftrightarrow$ πλήρες και ολικά φραγμένο

$\overline{T(\hat{B}_E)}$: κλειστό $\subseteq$ του F: Banach

$\overline{T(\hat{B}_E)}$ ολ. φραγμ. αρκεί νδο $T(\hat{B}_E)$ ολ φραγμ

Ξέρουμε ότι $T(B_E)$ ολ φραγμ

άρα $\forall \varepsilon>0$ υπάρχουν $B(Tx_k, \varepsilon/2)$, $k=1\dots n$ ώστε

$$T(B_E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(Tx_k, \varepsilon/2) \quad (\alpha)$$

Αν $x \in \hat{B}_E$ τότε $\exists\, x' \in B_E$ $\|x-x'\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|}$

άρα $\|Tx - Tx'\| < \varepsilon/2$

από (α) για το Tx' $\exists\, k \in [n]$: $Tx' \in B(Tx_k, \varepsilon/2)$

άρα $\|Tx - Tx_k\| \le \|Tx - Tx'\| + \|Tx' - Tx_k\| < \varepsilon$

άρα $T(\hat{B}_E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(Tx_k, \varepsilon)$ $\blacksquare$

(α) Αν $T, S \in \mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ νδο $T+\lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$

Απόδ. νδο $\forall (x_n)$ φραγμ ακολ. στο E, η $((T+\lambda S)(x_n))$ έχει συγκλ. υπακ.

- T συμπ $\Rightarrow (Tx_n)$ έχει συγκλ. υπακ, έστω (Ty_n) $\to (\lambda S y_n)$ έχει συγκλ υπακ
- S συμπ και (y_n) φραγμ $\Rightarrow (Sy_n)$ έχει συγκλ. υπακ έστω $(\lambda S z_n)$

$\Rightarrow (T+\lambda S)(z_n) = \underset{\text{συγκλ}}{T(z_n)} + \lambda \underset{\text{συγκλ}}{S(z_n)}$ η $((T+\lambda S)(z_n))$ είναι συγκλ υπακ της

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T, S \in \mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T + \lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T,S \in \mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Λήμμα

Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach,

$$B \in \mathcal{B}(M,E),\ X \in \mathcal{K}(E,F) \ \textit{και}\ \ A \in \mathcal{B}(F,N)$$
$$\Longrightarrow \quad XB \in \mathcal{K}(M,F) \quad \textit{και} \quad AX \in \mathcal{K}(E,N)$$

νδο $AX : E \to N$ συμπαγής: Έστω $\mathcal{U} \subseteq E$ φραγμ.

$\xRightarrow{X \text{ συμπ}}$ $X(\mathcal{U}) \subseteq F$ σχετ. συμπαγές: $\overline{X(\mathcal{U})}$ συμπαγές

$\xRightarrow{A \text{ φραγ}}$ $A(\overline{X(\mathcal{U})})$ συμπαγής (A συνεχής)

όμως $A(X(\mathcal{U})) \subseteq A(\overline{X(\mathcal{U})})$ συμπ

$\Downarrow$

$\overline{A(X(\mathcal{U}))} \subseteq A(\overline{X(\mathcal{U})})$ συμπ

$\uparrow$ συμπαγές και $\overline{AX(\mathcal{U})}$ συμπαγές

άρα $AX \in \mathcal{K}(E,N)$

νδο $XB : M \to F$ συμπαγής

Έστω $\mathcal{U} \subseteq M$ φραγμ. $\xRightarrow{B \text{ φραγμ}}$ $B(\mathcal{U}) \subseteq E$ είναι φραγμ.

$\xRightarrow{X \text{ συμπ}}$ $X(B(\mathcal{U})) \subseteq F$ σχετ. συμπαγές

XB στέλνει φραγμ. σε σχετ. συμπαγή άρα XB συμπαγής

Ειδική περίπτωση: $E = F$

$\mathcal{K}(E)$ κλειστός υποχ. του $\mathcal{B}(E)$

$\uparrow$ είναι και δακτύλιος, άρα άλγεβρα

$\forall X \in \mathcal{K}(E), \forall B \in \mathcal{B}(E)$ τα $BX, XB \in \mathcal{K}(E)$

δηλ. το $\mathcal{K}(X)$ ιδεώδες (αμφίπλευρο) της άλγεβρας $\mathcal{K}(E)$.

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T,S \in \mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Λήμμα

Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach,

$$B \in \mathcal{B}(M,E),\ X \in \mathcal{K}(E,F)\ \text{ και }\ A \in \mathcal{B}(F,N)$$
$$\Longrightarrow \quad XB \in \mathcal{K}(M,F) \quad \text{και} \quad AX \in \mathcal{K}(E,N)$$

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T,S\in\mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda\in\mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S\in\mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X\in\mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M\xrightarrow{B}E\xrightarrow{X}F\xrightarrow{A}N$$

Λήμμα

Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach,

$$\begin{aligned}&B\in\mathcal{B}(M,E),\ X\in\mathcal{K}(E,F)\ \text{ και }\ A\in\mathcal{B}(F,N)\\ \Longrightarrow\quad &XB\in\mathcal{K}(M,F)\quad\text{ και }\quad AX\in\mathcal{K}(E,N)\end{aligned}$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους). ~~Πχ οι πίνακες $T_n = P(\mathrm{span}\{e_1 \dots e_n\})$ στον ℓ^2, $\mathrm{rank}(T_n) = n < \infty$ αλλά~~

Πρόταση

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k e_k^* \;:\; \mathrm{rank}(T_n) = n \;:\; T_n \in \mathcal{F}(\ell^2)$

αλλά $T_n \longrightarrow D_a$ όπου $a = (\frac{1}{n})$ που δεν είναι πεπερ. τάξη

Απόδ. $\forall x \in \mathrm{ball}(\ell^2)$ $\quad D_a x = (\frac{1}{k} x(k))$

$T_n x = (x(1), \frac{1}{2}x(2), \dots, \frac{1}{n}x(n), 0, 0, \dots)$

$\Rightarrow (D_a - T_n)(x) = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}x(n+1), \dots)$

$$\|(D_a - T_n)x\|^2 = \sum_{k>n} \left|\frac{1}{k} x(k)\right|^2 \le \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k>n} |x(k)|^2 \le \frac{\|x\|_2^2}{(n+1)^2}$$

$\|D_a - T_n\| \le \frac{1}{n+1}$ $\quad T_n \longrightarrow D_a$ δεν είναι πεπερ. τάξη

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

<u>Απόδ.</u> Έστω $A \in \overline{\mathcal{K}(E,F)} \subseteq \mathcal{B}(E,F)$. Ν.δ.ο. $A \in \mathcal{K}(E,F)$

$\exists\ (A_n)$ ακολουθία στον $\mathcal{K}(E,F)$, $\|A_n - A\| \longrightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \kappa \in \mathbb{N} : \|A_\kappa - A\| < \varepsilon/3$

• Αν ισχύει: $A_\kappa(\hat{B}_E)$ σχετ. συμπαγές σύνολο, άρα ολικά φραγμ.

$\exists\, x_1 \dots x_m \in \hat{B}_E$ ώστε

$$A_\kappa(\hat{B}_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(A_\kappa x_i, \varepsilon/3)$$

• <u>Ισχύει</u> $$A(\hat{B}_E) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(Ax_i, \varepsilon)$$

<u>Απόδ.</u> Παρ/με $x \in \hat{B}_E$ έχω $\|Ax - A_\kappa x\| \leq \|A_\kappa - A\|\,\|x\| < \varepsilon/3$

όμως $A_\kappa x \in \bigcup B(A_\kappa x_i, \varepsilon/3) \Rightarrow \exists\, \underline{i} \in [m] : \|A_\kappa x - A_\kappa x_i\| < \varepsilon/3$

$$\|Ax - Ax_i\| \leq \|Ax - A_\kappa x\| + \|A_\kappa x - A_\kappa x_i\| + \|A_\kappa x_i - A x_i\|$$
$$< \|A - A_\kappa\|\,\|x\| + \varepsilon/3 + \|A_\kappa - A\|\,\|x_i\|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

άρα $Ax \in B(Ax_i, \varepsilon)$ ∎

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E, F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \to 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής. παρ/ν $A_n = \sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*$ στο ℓ^2: $A_n = P(\mathrm{span}\{e_1, \dots, e_n\})$

rank$(A_n) = n$

$\forall x$, $A_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$

$A_n x \to x$ διότι $\|A_n x - x\|^2 = \sum_{k>n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$A_n \xrightarrow[\text{σημείο}]{\text{κατά}} I \leftarrow$ όχι συμπαγής

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \to 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας συμπαγών τελεστών (ακόμα και πεπερασμένης τάξης) δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση: Ειδικότερα το $\mathcal{K}(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(E)$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H *είναι χώρος Hilbert και* $T \in \mathcal{B}(H)$, *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Ο T *είναι συμπαγής.*

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$.

Απόδ. Αν όχι, $\exists$ (x_n) ορθοκανονική και $\delta>0$ ώστε $|\langle Tx_n,x_n\rangle| \geq \delta$ για (∃ υπακολουθία με την ιδιότητα αυτή, περιορίζομαι σε υπακολουθία που έχει την ιδιότητα)

Άρα (x_n) φραγμ., T συμπ. $\Rightarrow$ (Tx_n) έχει υπακολουθία, έστω (Ty_n) που συγκλίνει, έστω στο z

οπότε $\exists\, n_0 : \forall n \geq n_0$

$\|Ty_n - z\| < \frac{\delta}{2}$

και $|\langle Ty_n, y_n\rangle - \langle z, y_n\rangle| = |\langle Ty_n - z, y_n\rangle| \leq \|Ty_n - z\|\,\|y_n\| < \frac{\delta}{2}$

$\frac{\delta}{2} \leq |\langle Ty_n, y_n\rangle| - \frac{\delta}{2} \leq |\langle z, y_n\rangle| \leq |\langle Ty_n, y_n\rangle| + \frac{\delta}{2} \quad \forall n \geq n_0$

$\therefore \quad |\langle z, y_n\rangle| \geq \frac{\delta}{2} \quad \forall n \geq n_0$

άτοπο από Bessel: $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, y_n\rangle|^2 \leq \|z\|^2$

άτοπο

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$.

(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$. (J. R. Ringrose)

Θα δείξω ότι $\exists F_n \in \mathcal{F}(H)$ ώστε $\|T - F_n\| < \frac{1}{n}$ $\forall n$

Θεωρώ $\mathcal{R}$ τη οικογένεια των ΟΚ συνόλων $A = \{a_i\}$ με τη ιδιότητα

$$|\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n} \quad \forall a \in A$$

[προφανώς $\forall A \in \mathcal{R}$ είναι πεπερασμένο]

$(\mathcal{R}, \subseteq)$ <u>Ισχυρ.</u> η $\mathcal{R}$ έχει ένα μεγιστικό στοιχείο

<u>Απόδ.</u> Αν όχι, τότε υπάρχουν $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \dots \subsetneq A_n$ $\quad A_n \in \mathcal{R}$ $\forall n$

θέτουμε $A_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: ΟΚ ακολουθία, άπειρο

και $\forall a \in A_0$ ισχύει $|\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n}$

αντίθετα προς την υπόθεση

Επομένως η $\mathfrak{F}$ περιέχει ένα μεγιστικό στοιχείο, έστω B

B: ορθ(οκανονικό) σύνολο: $|\langle Tb, b\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall b\in B$

όμως το B θα μεγαλώνει; θα υπάρχει ορθ. σύνολο $A \supsetneq B$

και να ανήκει $A\in \mathfrak{F}$

θέτουμε $M = \operatorname{span} B$ είναι υπόχωρος του H, πεπερ. διάστασης

Άρα $\forall x\perp M$ και $\|x\|=1$ ισχύει $|\langle Tx,x\rangle| < \frac{1}{4n}$ $(*)$

γιατί αν $|\langle Tx,x\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ τότε η οικογένεια

$A = B\cup\{x\}$ είναι ορθοκανονική και $A\in\mathfrak{F}$

άτοπο διότι η μεγιστικότητα του B

Έστω $u,v\in M^{\perp}$, $\|u\|\leq 1$, $\|v\|\leq 1$ τότε

Ισχ. $|\langle Tu,v\rangle| < \frac{1}{n}$

Από Πολωτική: $|\langle Tu,v\rangle| = \Big|\langle T\frac{u+v}{2},\frac{u+v}{2}\rangle - \langle T\frac{u-v}{2},\frac{u-v}{2}\rangle + i\langle T\left(\frac{u+iv}{2}\right),\frac{u+iv}{2}\rangle - \langle T\frac{u-iv}{2},\frac{u-iv}{2}\rangle\Big|$

$\|\ \|\leq 1$, και $\perp M$

$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}$

Έστω $P = P(M)$

Παίρ. $x,y\in \operatorname{ball}(H)$, $u=(I-P)x$, $v=(I-P)y$: $u,v\perp M$ και $\|\ \|\leq 1$

τότε $|\langle T(I-P)x,(I-P)y\rangle| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow |\langle (I-P)T(I-P)x, y\rangle| < \frac{1}{n}$ $\forall x,y\in\operatorname{ball}(H)$

$\underset{\text{sup ως προς } x,y}{\Rightarrow}$ $\|(I-P)T(I-P)\| \leq \frac{1}{n}$

$F_n := PT + TP - PTP$: ως τελ. πεπερασ. τάξης γιατί $P=P(M)$ πεπερασ. τάξης

$$T - F_n = T - PT - TP + PTP$$

$$(I-P)T(I-P) = (I-P)(T - TP)$$
$$= T - TP - PT + PTP = T - F_n$$

άρα! $\|T - F_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Αν $\exists\, (F_n)$ υπο ακολ. τελ. πεπερ. τάξης τ.ω.
$\|T - F_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \forall n$
και αφού επειδή F_n είναι συμπαγείς
έπεται ότι ο T θα είναι συμπαγής $\blacksquare$

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H,K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H,K)$ και $C \in \mathcal{B}(H,K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach (Per Enflo, Acta Math., **130** (1973)).

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Ο P. Enflo παραλαμβάνει το βραβείο από τον S. Mazur.