Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

25/2/2022

Περιεχόμενα

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle .$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Απόδ.

$$f_x(y_1 + \lambda y_2) = \langle y_1 + \lambda y_2, x \rangle = \langle y_1, x \rangle + \lambda \langle y_2, x \rangle = f_x(y_1) + \lambda f_x(y_2)$$

[Σχ. φυσικά: $f_x(y) = \langle x, \overset{\text{όχι}}{\downarrow} y \rangle$]

$$|f_x(y)| = |\langle x, y \rangle| \overset{CS}{\leq} \|x\| \|y\|$$

άρα, αν $y_n \xrightarrow{\|\,\|} y$ τότε

$$|f_x(y_n) - f_x(y)| = |f_x(y_n - y)| \leq \|x\| \|y_n - y\| \to 0$$

άρα f_x συνεχής $\square$

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x \in E$, ονομάζουμε f_x την απεικόνιση

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle.$$

Η f_x είναι γραμμική και συνεχής.

Αντίστροφο όχι πάντα

Παράδειγμα

$\langle \cdot , \cdot \rangle$

Στον $E = c_{00}$, η γραμμική μορφή

$$f : E \to \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_{n}^{n_x} \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής $f = f_x$ με $x \in c_{00}$.

Απόδ. Αν υπήρχε x ώστε $f_x(y) = \langle y, x \rangle$ δηλ. $\sum y(n)\overline{x(n)} = \sum y(n)\frac{1}{n}$ $\forall y \in c_{00}$

θα είχαμε $\forall n$, $f_x(e_n) = \frac{1}{n}$

δηλ. θα είχαμε $\langle e_n, x \rangle = \frac{1}{n}$ $\forall n$

δηλ. $x(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n$ οπότε $x \notin c_{00}$ άτοπο

$f_x(e_n) = \langle e_n, x \rangle = x(n) = \frac{1}{n}$ $\forall n$.

$e_n = (0, \dots, 1, \dots)$

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Λήμμα

Έστω E *χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν* $x \in E$, *ονομάζουμε* f_x *την απεικόνιση*

$$f_x : E \to \mathbb{K} : y \to \langle y, x \rangle.$$

Η f_x *είναι γραμμική και συνεχής.*

Παράδειγμα

Στον $E = c_{00}$, η γραμμική μορφή

$$f : E \to \mathbb{K} : (x(1), x(2), \dots) \mapsto \sum_n \frac{1}{n} x(n)$$

δεν είναι της μορφής $f = f_x$ με $x \in c_{00}$.

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H *χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή* $f : H \to \mathbb{K}$ *υπάρχει μοναδικό* $x \in H$ *ώστε* $f = f_x$, *δηλαδή*

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε } \ y \in H.$$

Απόδ. Έστω $f : H \to \mathbb{K}$ γραμμικό συνεχές

συναρτησοειδές $M = \operatorname{Ker} f = \{ y \in E : f(y) = 0 \}$: γραμμικός υπόχ. του H κλειστός : $M = f^{-1}(\{0\})$

- $f = 0$ τότε $M = H$ και προφανώς $f = f_0$
- $f \neq 0$ τότε M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του Hilbert H

άρα από το βασικό θεώρημα $\exists\, z \in H,\ z \neq 0,\ z \perp M$ μπορώ $\|z\| = 1$

Πραγ. $\forall y \in H$ $\quad f(z)y - f(y)z \in M$ διότι

$$f(f(z)y - f(y)z) = f(z)f(y) - f(y)f(z) = 0$$

άρα $\langle f(z)y - f(y)z, z \rangle = 0$

$$f(z)\langle y, z\rangle - f(y)\langle z, z\rangle = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = f(z)\langle y, z\rangle = \langle y, \underbrace{\overline{f(z)}\, z}\rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H$$

$f = f_x$ με $x = \overline{f(z)}\, z$ $\quad \blacksquare$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \neq 0$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \neq 0.$

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\mathrm{span}(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Υπενθύμιση Ένα υποσύνολο X ενός $\mathbb{K}$-γραμμικού χώρου V είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν δηλαδή ισχύει η συνεπαγωγή $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \neq 0.$

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο X είναι *(αλγεβρική) βάση* του V αν η γραμμική του θήκη $\mathrm{span}(X)$ ισούται με V, δηλαδή αν κάθε $v \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ στοιχείων $x_k \in X$.

Ορισμός

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική βάση του E αν

(i) είναι ορθοκανονική και $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j \in I$

(ii) Η γραμμική θήκη της είναι πυκνός υπόχωρος του E, δηλ. $\overline{\mathrm{span}\{e_i : i \in I\}} = E$. $\forall v \in E, \forall x \in E \; \exists e_k, \lambda_k \in \mathbb{K}$ ώστε $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k - v \right\| < \epsilon$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στόν ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση. του c_{00}

$\forall x \in c_{00} \quad x = (x(1), x(2), \ldots, x(n_x), 0, 0, \ldots)$

$= \sum_{n=1}^{n_x} x(n) e_n \in \mathrm{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση **δεν είναι** αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση.

$\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.

πχ: $x = \left(\frac{1}{n}\right) \in \ell^2$

$x \notin c_{00}$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση.
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\mathrm{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.

   $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\frac{dt}{2\pi}$
3. Στον χώρο $(C([-\pi,\pi],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i\sin(mt)$ είναι ορθοκανονική.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση.
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\mathrm{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.
3. Στον χώρο $(C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$ είναι ορθοκανονική.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση.
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.
3. Στον χώρο $(C([-\pi, \pi], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i \sin(mt)$ είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η $\{f_m\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του $(C([-\pi, \pi), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

   $\forall f \in C[-\pi,\pi]$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα $\| \ \|_2$ από τριγ. πολυώνυμα;

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση Σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert, μια ορθοκανονική βάση δεν είναι αλγεβρική βάση.

Παραδείγματα

1. Έστω $e_m = (\delta_m(n))$ όπου $\delta_m(n) = 1$ όταν $n = m$ και $\delta_m(n) = 0$ αλλιώς. Η οικογένεια $\{e_m : m \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική στον ℓ^2. Είναι αλγεβρική βάση του c_{00}, άρα και ορθοκανονική του βάση.
2. Η ίδια οικογένεια δεν είναι αλγεβρική βάση του ℓ^2, γιατί $\text{span}\{e_m : m \in \mathbb{N}\} \neq \ell^2$. Επειδή ο υπόχωρος $\text{span}\{e_m\} = c_{00}$ είναι πυκνός στον ℓ^2, η $\{e_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ℓ^2.
3. Στον χώρο $(C([-\pi,\pi], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ η οικογένεια $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ όπου $f_m(t) = e^{imt} = \cos(mt) + i\sin(mt)$ είναι ορθοκανονική. Ο γραμμικός χώρος που παράγει είναι ο χώρος των τριγωνομετρικών πολυωνύμων, συνεπώς η $\{f_m\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του $(C([-\pi,\pi), \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Είναι κλασικό θεώρημα στην Ανάλυση Fourier ότι κάθε $f \in (C([-\pi,\pi)$ προσεγγίζεται ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ από τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Συνεπώς η $\{f_m\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(C([-\pi,\pi), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Η* $\mathcal{C}$ *είναι ο.κ. βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική,*

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{E} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H. Η $\mathcal{E}$ είναι ο.κ. βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική,

Αν $\mathcal{E}$ είναι ο.κ. βάση, τότε είναι μεγιστική ως προς τη ο.κ. δηλ.
αν $\mathcal{E}'$ είναι ο.κ. οικογένεια με $\mathcal{E}' \supseteq \mathcal{E}$ τότε έχω $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$

Αν $\mathcal{E}$ δεν είναι μεγιστική, $\exists\ \mathcal{E}'$ ο.κ. με $\mathcal{E}' \supsetneq \mathcal{E}$

$\Rightarrow \forall e \in \mathcal{E}' \setminus \mathcal{E}$ τότε $e \perp \mathcal{E}$ δηλ. $\mathcal{E}^{\perp} \neq \{0\}$

$\Downarrow$

χωρίς ~~δ~~ πληρότητα

$e \perp \operatorname{span}\mathcal{E} \Rightarrow \overline{\operatorname{span}\mathcal{E}} \perp e \Rightarrow \overline{\operatorname{span}\mathcal{E}} \neq H$

άρα $\mathcal{E}$ όχι ο.κ. βάση

όμως $\mathcal{E}$ μεγιστική $\iff \mathcal{E}^{\perp} = \{0\}$

Έστω αντίστροφα ότι $\mathcal{E}$ μεγιστική, άρα $\mathcal{E}^{\perp} = \{0\} \Rightarrow (\operatorname{span}\mathcal{E})^{\perp} = \{0\}$

$\Rightarrow (\overline{\operatorname{span}\mathcal{E}})^{\perp} = \{0\}$

όμως ο κλειστός υπόχωρος $M = \overline{\operatorname{span}\mathcal{E}}$ έχει $M^{\perp} = \{0\}$

και αφού είμαι σε ΠΛΗΡΗ χώρο έπεται $M = H$

δηλ. span είναι πυκνή δηλ. $\mathcal{E}$ είναι ο.κ. βάση

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Η* $\mathcal{C}$ *είναι ο.κ. βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H *(εκτός από την* $\mathcal{C}$*),*

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Η* $\mathcal{C}$ *είναι ο.κ. βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H *(εκτός από την* $\mathcal{C}$*), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του* H *που είναι κάθετο στην* $\mathcal{C}$ *είναι το* 0.

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C}=\{e_i : i\in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H. Η $\mathcal{C}$ είναι ο.κ. βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathcal{C}$ είναι το 0.

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος[1] χώρος E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα). άσκηση

Απόδ Έστω $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του E

κάνουμε επαγωγή! $x_1\neq 0$ θέτω $y_1=x_1$, επιλέγω τον πρώτο ... $\notin \mathrm{span}\{x_1,x_2,\dots,x_{k_2-1}\}$ συνεχίζω επαγωγικά

$X=\{x_1,x_2,\dots x_{k_1},\dots\dots x_{k_2}\}$ $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$

$Y=\{x_{k_1},x_{k_2},\dots\}\subseteq X$ γραμμ. ανεξάρτητο και $\mathrm{span}\,Y=\mathrm{span}\,X \Rightarrow \overline{\mathrm{span}\,Y}=\overline{X}=E$

ορθογ. Gram-Schmidt: $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,\dots\}$ ορθοκανονικό ... $\mathrm{span}\{e_1,\dots e_n\}=\mathrm{span}\{y_1,\dots y_n\}$ $\forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathrm{span}\,\mathcal{E}=\mathrm{span}\,Y$ πυκνό στον E, $\mathcal{E}$ είναι ολική βάση του E

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Η* $\mathcal{C}$ *είναι ο.κ. βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H *(εκτός από την* $\mathcal{C}$*), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του* H *που είναι κάθετο στην* $\mathcal{C}$ *είναι το* 0.

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος [1] *χώρος* E *με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).*

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Η* $\mathcal{C}$ *είναι ο.κ. βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H *(εκτός από την* $\mathcal{C}$*), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του* H *που είναι κάθετο στην* $\mathcal{C}$ *είναι το* 0.

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος [1] *χώρος* E *με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).*

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F Αφού F πυκνό, παίρνω $X \subseteq F$ αριθμήσιμο πυκνό στον F
οπότε X πυκνό στον E και συνεχίζω όπως πριν

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ *ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Η* $\mathcal{C}$ *είναι ο.κ. βάση του* H *αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του* H *(εκτός από την* $\mathcal{C}$*), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του* H *που είναι κάθετο στην* $\mathcal{C}$ *είναι το* 0.

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος [1] *χώρος* E *με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).*

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F (π.χ. $E = C([0,1])$ και $F =$ πολυώνυμα).

---

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Παρατήρηση

Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο Hilbert H. Η $\mathcal{C}$ είναι ο.κ. βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο στην $\mathcal{C}$ είναι το 0.

Πρόταση

Κάθε διαχωρίσιμος [1] χώρος E με εσωτερικό γινόμενο έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση (και αντίστροφα).

Μάλιστα, αν $F \subseteq E$ πυκνός υπόχωρος, μπορώ να βρω ορθοκανονική βάση του E *μέσα στον* F (π.χ. $E = C([0,1])$ και $F =$ πολυώνυμα).

[1] Δηλ. περιέχει ένα πυκνό υποσύνολο που είναι αριθμήσιμο.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Bessel: αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ένα ον, $\forall x$ έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

Άσκηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \text{ αν και μόνον αν } x \in \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Άσκηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \text{ αν και μόνον αν } x \in \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Άσκηση

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \text{ αν και μόνον αν } x \in \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Μάλιστα

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \mathrm{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Μισή Απόδειξη Έστω $x \in \overline{K}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$\in \operatorname{span}\{e_k\} = Y$

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Μισή Απόδειξη Έστω $x \in \overline{K}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως, πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Μισή Απόδειξη Έστω $x \in \overline{K}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Όμως, πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

(Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης). Αλλά ξέρουμε (Πυθαγόρειο, δες την (2)) ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 . \quad \rightsquigarrow$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Μισή Απόδειξη Έστω $x \in \overline{K}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < \varepsilon .$$

Όμως, πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

(Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης). Αλλά ξέρουμε (Πυθαγόρειο, δες την (2)) ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 . \quad \rightsquigarrow$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 \,.$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$.

$x \in \overline{U} \Rightarrow x = \lim_m \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n$ και $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

Αντίστροφα, αν $\|x\|^2 = \sum^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 :$ $\forall n \geq n_0$

$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{n} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \varepsilon^2$

$\| \; \|x - \sum_{n=1}^{n} \langle x, e_n \rangle e_n\|^2$ άρα $\lim_{n \to \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_n \rangle e_n}_{\in K} = x$ άρα $x \in \overline{K}$ ▨

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < \varepsilon^2 .$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $\quad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$

και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = 0 \quad \text{και} \quad \lim_m \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2. \quad \square$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Συνέπεια:

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο* E *με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε* $x \in E$,

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του* E*).*

Ορθοκανονικές Βάσεις

Συνέπεια:

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).*

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$$\downarrow_{m \to \infty} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \downarrow_{m \to \infty}$$

$$0 \qquad\qquad\qquad 0$$

$\forall x \in \hat{E}$ ανν $x \in \overline{\operatorname{span}\{e_n\}}$ ανν $\{e_n\}$ είναι ON βάση

Πόρισμα $\forall x, y \in E$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\Downarrow$$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \lim_m \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle e_n , y \right\rangle$$

$$= \lim_m \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Συνέπεια:

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$,

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ (σύγκλιση ως προς τη νόρμα του E).

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ (Ισότητα Parseval).

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E, για κάθε $x, y \in E$ έχουμε “ $\sum x(n)\overline{y(n)}$ ”

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

$$= \langle x \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n| \right)}_{\text{“ένα” ο ταυτοτικός}}, y \rangle$$

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο* E *με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε* $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$. Parseval

[2] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο* E *με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε* $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

[2] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E,\|\cdot\|) \to (\ell^2,\|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση.

$U : (E, \| \|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \mapsto \underbrace{(\langle x, x_1 \rangle, \langle x, x_2 \rangle, \ldots)}_{\in \ell^2,\ \sum |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty}$

γραμμική !

$U(y_1 + \lambda y_2) = (\langle y_1 + \lambda y_2, x_n \rangle)_n$

$= (\langle y_1, x_n \rangle + \lambda \langle y_2, x_n \rangle)_n$

$= (\langle y_1, x_n \rangle)_n + \lambda (\langle y_2, x_n \rangle)_n = U(y_1) + \lambda U(y_2)$

$\|U(x)\|_2^2 = \sum |\langle x, x_n \rangle|^2 = \|x\|^2$

[2] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n\rangle|^2$.

$x_k \mapsto (\langle x_k, x_n\rangle)_n = (0,\dots,0,\overset{k}{1},0,\dots) = e_k$

Άρα η απεικόνιση $(E,\|\cdot\|) \to (\ell^2,\|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, x_n\rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

$U(E) \supseteq U(\text{span}\{x_1,x_2,\dots,x_n,x_{n+1},\dots\}) = \text{span}\{e_1,e_2,\dots\} = \underline{c_{00}}$

$U(E)$ πυκνή στο ℓ^2

Πρεπ Δείξω ότι ο $(E,\|\ \|)$ είναι διαχωρίσιμος! $\forall n \in \mathbb{N}$

$U^{-1}: (\text{span}\{e_1,e_2,\dots,e_n\}, \|\ \|_2) \longrightarrow (\overbrace{\text{span}\{x_1,x_2,\dots,x_n\}}^{E_n}, \|\ \|)$

ισομετρία και επί

ισομετρικό ισόμ. με τον $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_2)$ άρα διαχωρίσιμος

$\Longrightarrow$ sp είναι διαχωρίσιμος $\forall\ (E_n, \|\ \|)$,,

$\Rightarrow (\bigcup E_n, \|\ \|)$ διαχ

$\Rightarrow (\underbrace{\overline{\bigcup E_n}}_{=E}, \|\ \|)$ διαχ ✓

[2]Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος [2] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.

[2] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

$U: E \longrightarrow \ell^2$

$U(E)$ είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ^2

$= ?$

<u>**Πρόταση**</u> Αν $U(E) = \ell^2$ τότε $U^{-1}: \ell^2 \longrightarrow E$ ισομετρία επί

U ένα 1-1 και επί

πλήρης $\|\,\|_2$ $\Longrightarrow$ $(E, \|\,\|)$ πλήρης χώρος

(Uy_n) βασική $\Longleftarrow$ (y_n) βασική

άρα συγκλίνει σ' ένα x

$Ux = \lim Uy_n \in E$

άρα E <u>Hilbert</u>

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος [2] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2. **Αποδ** Ξέρουμε ότι η $U : x \mapsto (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι γραμμική ισομετρία. **Άρα** είναι 1-1 γιατί αν $x, x' \in H$ με $Ux = Ux'$ τότε λόγω γρ.

$U(x - x') = 0 \Rightarrow \|x - x'\| = \|U(x - x')\| = 0$ άρα $x = x'$

Ισχ $U(E) = \ell^2$

Αποδ Παίρνω μια $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell^2$ θα βρω $y \in E$ ώστε $Uy = \vec{\lambda}$ δηλ. $\langle y, x_n \rangle \overset{\text{ισχ}}{=} \lambda_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

[2] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

$(\lambda_\nu) \in \ell^2$ έχω $\sum |\lambda_\nu|^2 < \infty$

όπως $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $\forall \nu \geq n_0$ $\sum_{k>n} |\lambda_k|^2 < \varepsilon$

ορίζω τώρα $\forall n$ $y_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in H$ και προφ. $U(y_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

$= (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, 0, 0 \dots)$

Ισχύει $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βασική στο H :

$n > m$ $\|y_n - y_m\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\|^2$

$= \|\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k x_k\|^2 \underset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |\lambda_k|^2$

ον $< \varepsilon^2$

αν πάρω $m \geq n$ τότε

Από τη ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ του H $\exists y \in H$ ώστε $\|y_n - y\| \to 0$

όπως $Uy = \lim_n Uy_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots)$

$= \vec{\lambda}$ ∎

Ισομορφισμοί

Δείξαμε:

Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο E με εσωτερικό γινόμενο. Τότε, για κάθε $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$.

Άρα η απεικόνιση $(E, \|\cdot\|) \to (\ell^2, \|\cdot\|_2) : x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$ είναι (γραμμ.) ισομετρική εμφύτευση. Η εικόνα της είναι πυκνή στον ℓ^2.

Θεώρημα

Κάθε απειροδιάστατος διαχωρίσιμος[2] χώρος Hilbert H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ^2.
Ακριβέστερα, αν επιλέξουμε μια ορθοκανονική βάση $\{x_n\}$ του H, η απεικόνιση

$$U : H \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \ell^2 \; : \; x \to (\langle x, x_n \rangle)_n$$

απεικονίζει τον H (γραμμικά και) ισομετρικά επί του ℓ^2.

[2] Γενικότερα, ισχύει ότι κάθε χώρος Hilbert είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\ell^2(\Gamma)$ για κατάλληλο σύνολο Γ. (Αποδ. παραλείπεται.)

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος* Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση* $\phi : E \to H$ *με πυκνή εικόνα.*

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση* $\phi : E \to H$ *με πυκνή εικόνα.*

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση* $\phi : E \to H$ *με πυκνή εικόνα.*

Ο H *είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν* $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώρος Hilbert και* $\psi : E \to K$ γραμμική ισομετρία *με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία* T *από τον* H επί *του* K *ώστε* $T(\phi(x)) = \psi(x)$ *για κάθε* $x \in E$.

Η πλήρωση

Πρόταση

Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \to H$ με πυκνή εικόνα.

Ο H είναι «ουσιαστικά μοναδικός», με την έννοια ότι αν $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος Hilbert και $\psi : E \to K$ γραμμική ισομετρία *με πυκνή εικόνα, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον H* επί *του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$.*

*Ο χώρος Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται **η πλήρωση** του $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, tail, two heads, "\phi"] \arrow[d, tail, two heads, "\mathrm{id}"] & \phi(E) \arrow[r, tail] \arrow[d, tail, two heads, dashed] & H = \overline{\phi(E)} \arrow[d, tail, two heads, "T"] \\
E \arrow[r, tail, two heads, "\psi"'] & \psi(E) \arrow[r, tail] & K = \overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}$$

x $\quad \phi(x)$

x $\quad \psi(x)$

$\forall x \in E$

$T(\phi(x)) = \psi(x)$

Δείτε και το αρχείο complun.pdf.

$(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ ορίζω $d(x,y) = \|x-y\|$ για $x,y \in E$ $\|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$

$\downarrow$

(E,d) μ.χ.

$\Downarrow$ (πρόταση)

$\exists\ (H, \tilde{d})$ πλήρης μ.χ. και μία

$\varphi : E \longrightarrow H$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα

Επεκτείνω τις πράξεις και το $\langle , \rangle$ από το E στον H

Να ορίσω για H δομή χώρου Hilbert (μέσω της φ)

- αν $x, y \in H$ $\exists (x_n), (y_n)$ του E ώστε $x = \lim \varphi(x_n)$, $y = \lim \varphi(y_n)$

$\lambda \in \mathbb{K}$ Θεωρώ την $(x_n + \lambda y_n)_n$ στον E που είναι βασική

οπότε ορίζεται το $\underbrace{\lim_n \varphi(x_n + \lambda y_n)}_{z} \in H$

ονομάζω $x + \lambda y = z$

αποδεικνύεται καλά ορισμένο

(δηλ αν (x_n'), (y_n') έχουν

$\varphi(x_n') \to x$

$\varphi(y_n') \to y$ τότε

$\varphi(x_n' + \lambda y_n') \to x + \lambda y$

Έτσι ο $(H, +, \cdot)$ είναι γραμμ. χώρος

επίσης παρατηρώ ότι $(\langle x_n, y_n \rangle)_n$ είναι βασική στο $\mathbb{K}$

άρα συγκλίνει οπότε ορίζω

$\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y_n \rangle$ και παρατηρώ

$= \lim \langle x_n', y_n' \rangle$ (σωστά)

Επίσης παρατηρώ (σωστά) ότι $\tilde{d}(x,y) = \|x-y\| \overset{\text{def}}{=} (\langle x-y, x-y \rangle)^{1/2}$

οπότε ο $(H, \langle , \rangle)$ Hilbert!

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

$L^2([a,b])$ = η πλήρωση ως προς τη $\| \ \|_2$ του $C([a,b])$.

Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle \cdot , \cdot \rangle)$ όπου
$\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$
Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot , \cdot \rangle)$
(όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$
συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$).

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου
$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$
Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$
(όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$).
Θέτω $\langle f, g \rangle = \int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt.$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

(όποιο!)
Είναι ένα χώρος Hilbert
που περιέχει μία ισομετρικά
εικόνα του $(C([a,b]), \| \ \|_2)$
ως πυκνό υπόχωρο

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$
(όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$).

Θέτω $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt.$

Ονομάζω $L^2(\mathbb{R})$ την πλήρωση του F.

$$\|f\|_2 = \left(\int_{K_f} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

(όποιο)
Είναι ένα χώρο Hilbert περιέχει
για ισομ. εικόνα το
$(C_c(\mathbb{R}), \| \ \|_2)$
ως πυκνό υπόχωρο

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Χωρίς Μέτρο Θεωρώ τον $E = (C([a,b]), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ όπου

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Ονομάζω $L^2([a,b])$ την πλήρωση του E.

Θεωρώ τον $F = (C_c(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$
(όπου $f \in C_c(\mathbb{R})$ σημαίνει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής και υπάρχει $K_f \subseteq \mathbb{R}$ συμπαγές ώστε $f(t) = 0$ όταν $t \notin K_f$).

Θέτω $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{K_f} f(t)\overline{g(t)}dt.$

Ονομάζω $L^2(\mathbb{R})$ την πλήρωση του F.

Για τις ανάγκες του προπτυχιακού μαθήματος, αυτοί θα είναι οι ορισμοί των χώρων Hilbert $L^2([a,b])$ και $L^2(\mathbb{R})$.

Ενημερωτικά παρατίθενται στις επόμενες δυο διαφάνειες οι (ισοδύναμοι) ορισμοί με χρήση Θεωρίας Μέτρου.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\displaystyle\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\displaystyle\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\displaystyle\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.

Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σχ. παντού $\iff$ $f - g \in \mathcal{N}$.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σχ. παντού $\iff$ $f - g \in \mathcal{N}$.
Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2$.

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\displaystyle\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\displaystyle\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σχ. παντού $\iff$ $f - g \in \mathcal{N}$.
Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2$.
Θέτω $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.

(ανεξ)άρτητη του αντιπροσώπου $f \rightsquigarrow f+\mathcal{N}$

Ο $\mathcal{L}^2(\mu)$, ο $L^2(\mu)$

Με Μέτρο (Μέτρον Άριστον!) Έστω $(X, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου (π.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$).

Ορισμός

Ο χώρος $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{S}, \mu) = \mathcal{L}^2(\mu)$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (ή $f : X \to \mathbb{C}$) που είναι μετρήσιμες και ικανοποιούν $\displaystyle\int_X |f|^2 d\mu < +\infty$.

Ο αριθμός $\displaystyle\left(\int_X |f|^2 d\mu\right)^{1/2}$ συμβολίζεται $\|f\|_2$.

Θέτω $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^2(\mu) : \|f\|_2 = 0\}$.
Αν $f, g \in \mathcal{L}^2(\mu)$, έχω $f = g$ μ-σχ. παντού $\iff$ $f - g \in \mathcal{N}$.
Επίσης, ο $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{L}^2$.
Θέτω $\|f + \mathcal{N}\|_2 := \|f\|_2$. Είναι καλά ορισμένη νόρμα στον χώρο πηλίκο $L^2(\mu) := \mathcal{L}^2(\mu)/\mathcal{N}$.
Έπεται ότι ο $L^2(\mu)$ αποτελείται από τις κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων του $\mathcal{L}^2(\mu)$ modulo ισότητα μ-σχ. παντού.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης ως προς τη $\| \ \|_2$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f+\mathcal{N}, g+\mathcal{N}\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο
$\langle f+\mathcal{N}, g+\mathcal{N}\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο $C([a,b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a,b],\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $L^2([a,b])$, ο $L^2(\mathbb{R})$

Θεώρημα (Riesz–Fisher) Ο $L^2(\mu)$ είναι πλήρης (άρα είναι χώρος Hilbert αφού η $\|\cdot\|_2$ προέρχεται από το εσωτ. γινόμενο $\langle f+\mathcal{N}, g+\mathcal{N}\rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}d\mu(t)$).

Θεώρημα (πόρισμα π.χ. του Θ. Luzin) Ο $C([a,b])$ είναι πυκνός στον $L^2([a,b],\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$, βεβαίως.

Ο $C_c(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^2(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Τρία πράγματα:

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.
(Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(\Gamma)$)

Συμβολισμός: $\ell^2(n) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.
(Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(\Gamma)$)

Συμβολισμός: $\ell^2(n) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.

Όποιος ενδιαφέρεται για τον $\ell^2(\Gamma)$ ας δεί το αρχείο nonsep.pdf.