Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

22 Φεβρουαρίου Καλημέρα!

Περιεχόμενα

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

ημι-ξένη γινόμενο

$$\begin{aligned}
&(i) && \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\
&(ii) && \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\
&(iii) && \langle x, x \rangle \geq 0 \\
&(iv) && \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0
\end{aligned}$$

(ii) Ερμιτιανό

(iii) θετικό ημι ορισμένο

(iv) : θετικό ορισμένο

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Παρ/γ $\langle \cdot,\cdot \rangle$:

- $\mathbb{K}^n$, $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x(i)\overline{y(i)}$ $\quad (x(i), y(i) \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$

- $M_n(\mathbb{K})$, $\langle a,b \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}} = Tr(ab^*)$ $\quad [b_{ij}]^* = [\overline{b}_{ji}]$

  άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων

- $C([a,b]) = \{ f:[a,b] \to \mathbb{K} : \text{συνεχής} \}$

  $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ $\quad$ ΔΞ $\langle f,f \rangle = 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\overline{f(t)}\,dt = 0$

  $\| \int |f|^2 = 0$

  άρα $|f|^2$ συνεχής και ≥ 0

  $\Rightarrow f(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

  $R([a,b]) := \{ f:[a,b] \to \mathbb{K} : R\text{-ολοκληρώσιμες} \}$

  $\langle \cdot,\cdot \rangle$: είναι μόνο ημι-εσωτερικό γινόμενο

  $\int |f|^2 = 0 \not\Rightarrow f(t) = 0$ παντού

Παράδειγμα: Έστω $p:[a,b] \to \mathbb{R}^+$ συνεχής, ΔΞ κατανομή πιθανότητας

$f,g \in C([a,b])$: $\langle f,g \rangle_p = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\underbrace{p(t)dt}_{d\mu(t)}$

ημι-εσωτ. γινόμενο

θετικά ορισμένο $\Longleftrightarrow p(t) > 0 \quad \forall t \in [a,b]$ Σωστό;

- $C_c(\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R} \to \mathbb{K} : f$ συνεχής με $\underbrace{\text{συμπαγή}}_{\exists M_f > 0 :\ f(t) = 0\ \forall t \notin [-M_f, M_f]}$ φορέα $\}$

  $\langle f,g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_{-M_f}^{M_f} f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ορισμός

Έστω E ένας $\mathbb{K}$-γραμμικός χώρος ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Ένα εσωτερικό γινόμενο (inner product ή scalar product) στον E είναι μια απεικόνιση

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

τέτοια ώστε

$$\begin{array}{ll} (i) & \langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle \\ (ii) & \overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle \\ (iii) & \langle x, x \rangle \geq 0 \\ (iv) & \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 \end{array}$$

για κάθε $x, x_1, x_2, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

άρα $\quad (i)' \ \langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \bar{\lambda} \langle x, y_2 \rangle$.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο,
(a) *για κάθε $x, y \in E$ ισχύει*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}.$$

(b) *Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο: Παρατηρήσεις

(α) Μια απεικόνιση

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i), (ii) και (iii) του ορισμού του εσωτερικού γινομένου λέγεται ημι–εσωτερικό γινόμενο.
Ένα ημι–εσωτερικό γινόμενο ικανοποιεί την θεμελιώδη ανισότητα Cauchy-Schwarz (όχι όμως και το (b) της Πρότασης).

(β) Αρκετοί συγγραφείς (ιδιαίτερα σε συγγράμματα μαθηματικής φυσικής ή άλλων εφαρμογών) ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο ώστε να είναι γραμμικό ως προς την δεύτερη μεταβλητή και αντιγραμμικό ως προς την πρώτη. Έτσι, ορίζουν το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$ ως εξής:
$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x(k)}y(k)$.

(γ) Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο αποκαλείται καμμιά φορά και χώρος προ-Hilbert (pre-Hilbert space).

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Νόρμα σε έναν γραμμ. χώρο X είναι μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ ώστε για κάθε $x, y, \in X$ και $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y) = \|x-y\|, \quad x, y \in X$ είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του). Όταν ο μετρ. χώρος (X, d) είναι πλήρης, ο $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Επομένως κάθε $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x,y) := \|x-y\| = \langle x-y, x-y\rangle^{1/2},\ x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$\begin{aligned} + &: (E,d)\times(E,d) \to (E,d) : (x,y) \to x+y \\ \cdot &: (\mathbb{K}, |\cdot|)\times(E,d) \to (E,d) : (\lambda,x) \to \lambda x \end{aligned}$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E,d)\times(E,d) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x,y) \to \langle x,y\rangle$$

είναι συνεχής.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y\rangle = 0, \text{ τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad !!$$

όχι: $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$

Καθετότητα

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται κάθετα (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y\rangle = 0$.
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική (orthonormal) αν $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορθοκανονική $\Rightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητη. Προς την αντίστροφη:

Πρόταση (Διαδικασία Gram-Schmidt)

Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια γραμμικά ανεξάρτητη ακολουθία σ' έναν χώρο $(E, \langle .,. \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο, τότε υπάρχει μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ στον E ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, να ισχύει[1]
$[e_n : n = 1, 2, ..., k] = [x_n : n = 1, 2, ..., k]$.

Κάθε υπόχωρος $F \subseteq E$ πεπερασμένης διάστασης έχει μια αλγεβρική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ που είναι ορθοκανονική. Κάθε $x \in F$ γράφεται

μοναδικά $\quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\,.$

[1] με $[A]$ ή span A θα συμβολίζουμε την γραμμική θήκη ενός $A \subseteq E$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E.

(α) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $y_x \in F$ που είναι πλησιέστερο στο x. Αν $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του F, το y_x δίνεται από τον τύπο $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$. $\|y_x - x\| = \inf\{\|z - x\| : z \in F\}$

(β) Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή, αν δοθεί ορθοκανονική οικογένεια $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \ldots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (I)

Λήμμα

Έστω E *χώρος με εσωτερικό γινόμενο,* $x \in E$ *και* F *πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του* E.

(α) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $y_x \in F$ *που είναι πλησιέστερο στο* x. *Αν* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *είναι ορθοκανονική βάση του* F, *το* y_x *δίνεται από τον τύπο* $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

(β) Επιπλέον το $x - y_x$ *είναι κάθετο στον* F *και αντίστροφα, αν* $y \in F$ *και* $x - y \perp F$, *τότε* $y = y_x$.

Δηλαδή, αν δοθεί ορθοκανονική οικογένεια $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (βέλτιστη προσέγγιση) (Ι)

Λήμμα

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x \in E$ και F πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του E.
(α) Υπάρχει ένα και μοναδικό διάνυσμα $y_x \in F$ που είναι πλησιέστερο στο x. Αν $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του F, το y_x δίνεται από τον τύπο $y_x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.
(β) Επιπλέον το $x - y_x$ είναι κάθετο στον F και αντίστροφα, αν $y \in F$ και $x - y \perp F$, τότε $y = y_x$.

Δηλαδή, αν δοθεί ορθοκανονική οικογένεια $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, η απεικόνιση

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}^+ : \vec{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \to \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|$$

έχει ολικό ελάχιστο στο σημείο $\vec{\lambda} = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle) \in \mathbb{K}^n$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (β))

Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (β))

Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.

Τώρα: $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k \rangle = 0 \ \forall k, \iff$

$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \ \forall k, \iff y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = y_x$.

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (β))

Κάθε $y \in F$ γράφεται $y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k \rangle e_k$.

Τώρα: $(x - y) \perp F \iff \langle x - y, e_k \rangle = 0 \ \forall k, \iff$

$\langle y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \ \forall k, \iff y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = y_x$.

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

Το πλησιέστερο διάνυσμα (Απόδειξη (α))

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

παρατηρούμε ότι $u \perp F$ (γιατί $\langle u, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \dots n$) και $v \in F$, άρα $v \perp u$.

(α) Αν $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = \left(x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right) = u + v$$

παρατηρούμε ότι $u \perp F$ (γιατί $\langle u, e_k \rangle = 0$ για $k = 1, \dots n$) και $v \in F$, άρα $v \perp u$. Πυθαγόρειο: $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ δηλαδή

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \lambda_k|^2 \qquad (1) \\ &\geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2, \text{ ισότητα ανν } \langle x, e_k \rangle = \lambda_k \ \forall k. \end{aligned}$$

Παρατήρηση

Έστω E *χώρος με εσωτ. γιν. και* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *ορθοκανονική ακολουθία.*

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E *χώρος με εσωτ. γιν. και* $\{e_1, e_2, \dots\}$ *ορθοκανονική ακολουθία.*

Παρατήρηση

Έστω E *χώρος με εσωτ. γιν. και* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *ορθοκανονική ακολουθία.*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(i) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E *χώρος με εσωτ. γιν. και* $\{e_1, e_2, \ldots\}$ *ορθοκανονική ακολουθία.*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(i) $\sum\limits_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \ldots, n]$.

Bessel κ.λπ.

Παρατήρηση

Έστω E χώρος με εσωτ. γιν. και $\{e_1, e_2, \dots\}$ ορθοκανονική ακολουθία.

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}. \qquad (2)$$

(από την (1) με $\lambda_k = 0$).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

(i) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Στο □ !!

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

$d(x,y) = \|x-y\|$ όπου $\|h\| = (\langle h,h\rangle)^{1/2}$

δηλ. αν (x_n) είναι βασική ως προς, τότε $\exists\, x \in E$ ώστε $\|x_n - x\| \to 0$

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert.

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

Χώροι Hilbert

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

άσκηση

$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N}) = \{(x(n)) : x(n) \in \mathbb{K}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty\}$

$\forall n$ $\quad \sum_{k=1}^{n} |x(k)\overline{y(k)}| \overset{CS}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2\right)^{1/2} < +\infty$

$\|x\|_2 \|y\|_2$

$\Rightarrow$ η $\sum x(k)\overline{y(k)}$ συγκλίνει απόλυτα άρα συγκλίνει

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

$c_{00} = \{(x(n))$ με πεπ. μορφή δηλ. $\exists\, n_x \in \mathbb{N}:\ x(m) = 0\ \ \forall m \geq n_x\}$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |x(m)|^2 = \sum_{m=1}^{n_x} |x(m)|^2 < +\infty$$

$\Rightarrow\ c_{00} \subseteq \ell^2$ όμως $c_{00} \neq \ell^2$ γιατί πχ. $x = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$

$x \in \ell^2,\ x \notin c_{00}$

νδο ότι είναι πυκνό στο ℓ^2:

Μου δίνουν $x = (x(n)) \in \ell^2$,
" $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$ $\exists\, n_x: \sum_{n > n_x} |x(n)|^2 < \varepsilon^2$

οπότε παίρνω: $x_\varepsilon = (x(1), \dots, x(n_x), 0, 0, \dots) \in c_{00}$

$$x - x_\varepsilon = (0, \dots, 0, x(n_x+1), x(n_x+2), \dots) \in \ell^2$$

$$\|x - x_\varepsilon\|_2^2 = \sum_{n=n_x+1}^{\infty} |x(n)|^2 < \varepsilon^2$$

$\|x - x_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$

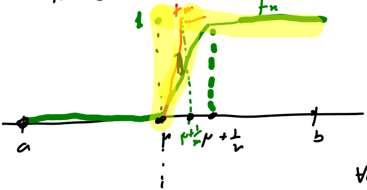
Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Υπάρχει $f_n \in C[a,b]$ ώστε $\|\ \|_1$-βασική αλλά όχι $\|\ \|_2$-συγκλίνουσα



$m \geq n$

$$\|f_m - f_n\|_2^2 = \int_\mu^{\mu+\frac{1}{n}} |f_m - f_n|^2 \qquad |f_m(t) - f_n(t)| \leq 1 \quad \forall t, m, n$$

$$\leq 1\left(\mu + \frac{1}{n} - \mu\right) = \frac{1}{n}$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ οπότε $\forall m, n \geq n_0$ $\|f_m - f_n\|_2 < \sqrt{\varepsilon}$

άρα (f_n) είναι $\|\ \|_2$-βασική

Basically, $f_n \to f$ όπου $f(t) = 0$ στο $[a, \mu]$, $f(t) = 1$ στο $(\mu, b]$: δεν μπορεί να είναι συνεχής

Έστω: Έστω ότι $\exists\, f \in C[a,b]$ ώστε $\|f_n - f\|_2 \to 0$

$$\int_a^\mu |f|^2 + \int_{\mu+\frac{1}{n}}^b |f-1|^2 = \int_a^\mu |f - f_n|^2 + \int_{\mu+\frac{1}{n}}^b |f - f_n|^2 \leq \int_a^b |f - f_n|^2 = \|f - f_n\|_2^2 \to 0$$

$$\Rightarrow \int_a^\mu |f|^2 + \int_\mu^b |f-1|^2 = \int_a^\mu |f|^2 + \lim_{n\to\infty} \int_{\mu+\frac{1}{n}}^b |f-1|^2 \quad (\text{διότι } |f-1|^2 \text{ συνεχής})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^\mu |f|^2 + \int_{\mu+\frac{1}{n}}^b |f-1|^2 \right) \leq \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|^2 = 0$$

άρα $f(t) = 0\ \forall t \in [a, \mu]$
και $f(t) = 1\ \forall t \in [\mu, b]$ $\Big\}$ άτοπο

Συμπέρασμα:

$\|f\|_2^2 = \int |f(t)|^2 dt$

$(C([a,b]), \| \ \|_2)$: χώρος μ' εσωτ. γινόμενο, όχι πλήρης $\Big\}$ όχι Hilbert

$(C([a,b]), \| \ \|_\infty)$ όχι χώρος μ' εσωτ. γινόμενο, είναι πλήρης $\Big|$ Banach, όχι Hilbert.

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$$

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Χώροι Hilbert

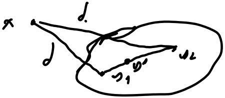
Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (ΙΙ))

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $F \neq \emptyset$ κυρτό και πλήρες *υποσύνολο του* E. *Αν* $x \in E \setminus F$, *τότε υπάρχει μοναδικό* $y_x \in F$ *πλησιέστερο προς το* x, *δηλαδή τέτοιο ώστε*
$\|x - y_x\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}$.

$y_1, y_2 \in F$, $\lambda \in [0,1]$
$\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \in F$

Απόδ. Μοναδικότητα: Έστω $y_1, y_2 \in F$ $\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = d := d(x,F)$

$\exists\, y'$ ασ ευθ. τμήμα από y_1 μέχρι y_2
με απόσταση $\|x - y'\| < d$



Απόδ. $\|(y_1 - x) - (y_2 - x)\|^2 + \|(y_1 - x) + (y_2 - x)\|^2 = 2\|y_1 - x\|^2 + 2\|y_2 - x\|^2$

$\|y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 + y_2 - 2x\|^2 = 2d^2 + 2d^2$

>0 άρα $\|y_1 + y_2 - 2x\|^2 < 4d^2$

δηλ. $\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\|^2 < d^2$ άτοπο

διότι $\frac{y_1 + y_2}{2} \in F$ αφού θα έπρεπε

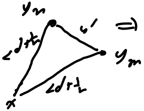
$\left\|\frac{y_1 + y_2}{2} - x\right\| \geq d$

Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος:

$$d = \operatorname{dist}(x,F) = \inf\{\|x-y\| : y \in F\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, y_n \in F$ ώστε $d \leq \|x-y_n\| < d + \frac{1}{n}$

Ισχ. (y_n) βασική: Γεωμετρικά



$\Rightarrow$ y_n και y_m κοντά αλλιώς κάποιο y' θα είχε $\|x-y'\| < d$

Αυτό κάνουμε το #

$$\|y_n - y_m\|^2 + 4\left\|\frac{y_n+y_m}{2} - x\right\|^2 = 2\|y_n-x\|^2 + 2\|y_m-x\|^2 < 2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2$$

$$\|y_n - y_m\|^2 < 2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2 - 4\underbrace{\Big\|\underbrace{\frac{y_n+y_m}{2}}_{\in F} - x\Big\|^2}_{\geq d}$$

$$\|y_n - y_m\|^2 < \underbrace{2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2}_{\to 0}$$

$n,m \to \infty$ άρα (y_n) είναι βασική ακολουθία στο μ.χ. (F, d)

F: πλήρης! $\exists\, y_x \in F$ και $\|y_n - y_x\| \to 0$

$$d \leq \|y_n - x\| < d + \frac{1}{n} \quad \forall n$$

$$\Downarrow$$

$$d \leq \|y_x - x\| \leq d \quad \text{άρα } \|y_x - x\| = d \qquad \blacksquare$$

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (ΙΙ))

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $F \neq \emptyset$ κυρτό και πλήρες *υποσύνολο του E. Αν $x \in E \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_x \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε* $\|x - y_x\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}$.

Ορισμός

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y_x του F ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον F, και το συμβολίζουμε $P_F(x)$ ή $P(F)x$.

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα (ΙΙ))

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $F \neq \emptyset$ κυρτό και πλήρες *υποσύνολο του E. Αν $x \in E \setminus F$, τότε υπάρχει μοναδικό $y_x \in F$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε*
$\|x - y_x\| = d(x, F) := \inf\{\|x - z\| : z \in F\}$.

Ορισμός

Το μοναδικό αυτό στοιχείο y_x του F ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον F, και το συμβολίζουμε $P_F(x)$ ή $P(F)x$.

Πρόταση (Κάθετο διάνυσμα)

Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, F *πλήρης γραμμικός υπόχωρος* του E. Αν $x \in E \setminus F$, η (ορθή) προβολή $P_F(x)$ του x στον F είναι το μοναδικό $y \in F$ τέτοιο ώστε $x - y \perp F$.

Υπ. Θέσω $F \subseteq E$ πλήρης γραμμ. υπόχωρος

$\forall x \in E \ \exists!\, y_x = P_F(x) \in F$ τ.ω $\|y_x - x\| = \delta = d(x,F)$

1α $x - y_x \perp F$

$\forall z \in F$ νδο $x - y_x \perp z$

Θέτω $F_z = \mathrm{span}\{z, y_x\} \subseteq F$ (πεπερ.) διάστασης

οπότε (από το Λήμμα) $\exists\, w_x \in F_z$ με $x - w_x \perp F_z$

οπότε

$$x - y_x = \underbrace{x - w_x}_{\perp F} + \underbrace{w_x - y_x}_{\in F}$$

Πυθ

$$\Rightarrow \|x - y_x\|^2 = \|x - w_x\|^2 + \|w_x - y_x\|^2 \geq \|x - w_x\|^2$$ αφού $w_x \in F_z \subseteq F$

$\|x - w_x\| \geq \delta$

$\delta = \|x - y_x\| \geq \|x - w_x\| \geq \delta$ άρα ισότητες!

$\|x - w_x\| = \delta$ άρα $w_x = y_x$ (μοναδικότητα του y_x)

οπότε $x - y_x \perp F_z$ $\Rightarrow x - y_x \perp z$

Αντίστροφα, αν κάποιο $y \in F$ έχει $x - y \perp F$ (δείξε) $y = y_x$

Απόδ $\forall z \in F$: $x - z = \underbrace{x - y}_{\perp F} + \underbrace{y - z}_{\in F}$

Πυθ

$$\Rightarrow \|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2$$

αφού $\|x - z\| \geq \delta \Rightarrow \|x - y\|^2 = \delta$ άρα προκύπτει

$y = y_x$ λόγω μοναδ.

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Απόδ: $M \neq H \Rightarrow \exists\, x \in H \setminus M$

από ! Πρόταση $\exists\, y_x \in M$ με $\underbrace{x - y_x}_{z \neq 0} \perp M$ διότι $x \notin M$ ενώ $y_x \in M$

$x - y_x \neq 0$

Χώροι Hilbert

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί: $M = \{x \in c_\omega : \sum_{n=1}^{n_x} \frac{x(n)}{n} = 0\}$

Απόδ πρότ $M = \ker\varphi$ $\quad \varphi : c_\omega \to \mathbb{K}$, $\quad x \mapsto \sum \frac{x(n)}{n}$ προφανώς καλά ορισμένη και γραμμική

- άρα $\ker\varphi$ είναι γραμμ. υπόχωρος του c_ω
- $\varphi \neq 0 \Rightarrow M \neq c_\omega$ (π.χ. $e_3 \notin M$)
- M κλειστό! Έστω (x_i) από $x_i \in M$ με $\|x_i - x\|_2 \to 0$ όπου $x \in c_\omega$

θα $x \in M$ αφού $\sum \frac{x_i(n)}{n} = 0 \quad \forall i$

$$\left|\sum \frac{x(n)}{n}\right| = \left|\sum \frac{x(n) - x_i(n)}{n}\right| \overset{CS}{\leq} \left(\sum |x(n) - x_i(n)|^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}}_{\pi/\sqrt{6}}$$

$$\leq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x - x_i\|_2 \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$$

άρα $\sum \frac{x(n)}{n} = 0$

δηλ $x \in M$

Θεώρημα (Ύπαρξη καθέτου διανύσματος)

Αν H είναι χώρος Hilbert και M είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του H τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$ ώστε $z \perp M$.

Η πληρότητα δεν μπορεί να παραλειφθεί:

Παράδειγμα

Στον $(c_{00}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ υπάρχει γνήσιος κλειστός υπόχωρος M, ώστε $M^{\perp} = \{0\}$.

$\langle x, (\frac{1}{n}) \rangle_{\ell^2} = 0$

$$M = \left\{ x = (x(n)) \in c_{00} : \sum \frac{x(n)}{n} = 0 \right\}.$$

$M = \{(\frac{1}{n})\}^{\perp} \cap c_{00}$

$M^{\perp} = \{(\frac{1}{n})\}^{\perp\perp} \cap c_{00}$

$= \text{span}\{(\frac{1}{n})\} \cap c_{00}$

$= \{0\}$

Ισχ. $M^{\perp} = \{0\}$: έστω $y \perp M$ $(y \in c_{00})$

αφού $\forall n \in \mathbb{N}$ $e_1 - n e_n \in M$ διότι $x = e_1 - n e_n = (1, 0, \dots, 0, -n, 0, \dots)$

$\sum \frac{x(n)}{n} = \frac{1}{1} + 0 \dots - \frac{n}{n} = 0$

πρέπει $\langle y, e_1 - n e_n \rangle = 0$ $\forall n$

δηλ. $\langle y, e_1 \rangle = n \langle y, e_n \rangle$ άρα $y(n) = \frac{1}{n} y(1)$

αφού $y \in c_{00}$, $\exists n_0$: $y(n_0) = 0$ οπότε $y(1) = n_0 y(n_0) = 0$

τότε $y(n) = \frac{1}{n} y(1) = 0$ $\forall n$ δηλ. $y = 0$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E \overset{H}{:} \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y\rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

$x_n \in A^{\perp}$ $\forall n$ και $x_n \to x$ τότε

$\langle x, y\rangle = \lim_{n} \langle x_n, y\rangle = 0$ $\forall y \in A$

λόγω C-S

$|\langle x, y\rangle - \langle x_n, y\rangle| \le \|x_n - x\| \|y\|$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, θέτω

$$A^{\perp} = \{x \in E : \langle x, y \rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in A\}.$$

Ο $A^{\perp}$ είναι πάντα κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H.

Θεώρημα (Ορθογώνια διάσπαση)

Αν M είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H, τότε

$$M \oplus M^{\perp} = H.$$

Δηλαδή
$\forall y \in H$ γράφεται μοναδικά $y = y_M + y_{\perp}$ όπου $y_M \in M$, $y_{\perp} \in M^{\perp}$.

Πυθαγόρειο: $\quad \|y\|^2 = \|y_M\|^2 + \|y_{\perp}\|^2 \quad \forall y \in H.$

<u>Απόδ</u> Αν $M = H$ παίρε $y_M = y$, $y_\perp = 0$

Αλλιώς, από το θεώρ $\exists!\, y_M = P_M(y) \in M$ με $y - y_M \perp M$ άρα

θέτω $y_\perp = y - y_M$

<u>Μοναδ</u> Αν $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in M$, $y_2 \perp M$

τα $y_M + y_\perp = y_1 + y_2 \Rightarrow \underbrace{y_M - y_1}_{\in M} = \underbrace{y_2 - y_\perp}_{\perp M}$ άρα $y_M - y_1 \in M \cap M^\perp$

άρα $y_M - y_1 \perp y_M - y_1$

$\Rightarrow y_M - y_1 = 0$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M *κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert* H. *Η απεικόνιση*

$$P_M : H \to H \ : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H \ : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H \ : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^{\perp} = H$ και $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H \ : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^{\perp} = H$ και $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$y_1, y_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$ νδο $P_M(y_1 + \lambda y_2) = P_M(y_1) + \lambda P_M(y_2)$ ✓

$$y_1 + \lambda y_2 = P_M(y_1 + \lambda y_2) + (y_1 + \lambda y_2)_\perp$$

$$y_1 = P_M(y_1) + (y_1)_\perp$$

$$\lambda y_2 = \lambda P_M(y_2) + \lambda (y_2)_\perp$$

$$P_M(y_1) + \lambda P_M(y_2) + (y_1)_\perp + \lambda (y_2)_\perp = P_M(y_1 + \lambda y_2) + (y_1 + \lambda y_2)_\perp$$

$$\underbrace{P_M(y_1 + \lambda y_2) - \left(P_M(y_1) + \lambda P_M(y_2)\right)}_{\in M} = \underbrace{(y_1)_\perp + \lambda (y_2)_\perp - (y_1 + \lambda y_2)_\perp}_{\in M^\perp} \quad \text{άρα} = 0$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Πόρισμα (Ορθή προβολή)

Έστω M κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Η απεικόνιση

$$P_M : H \to H \ : y \to y_M$$

είναι γραμμική και συνεχής.

Ότι η P_M είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται (ως γνωστόν) από τις σχέσεις $M + M^{\perp} = H$ και $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Η συνέχεια της P_M προκύπτει απ' το Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$\|y_M\|^2 + \|y_{\perp}\|^2 = \|y\|^2$$

άρα
$$\|P_M(y)\| = \|y_M\| \leq \|y\|$$

οπότε, αν $y_n \to y$ έχουμε

$$\|P_M(y_n) - P_M(y)\| \underset{\text{γρ}}{=} \|P_M(y_n - y)\| \leq \|y_n - y\| \to 0.$$

Ορθογώνιες διασπάσεις

Ορθογώνιες διασπάσεις

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert:
$A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \text{span}(A)$ πυκνός στον H.

Ορθογώνιες διασπάσεις

Παρατήρηση - Άσκηση Όταν H είναι χώρος Hilbert:
$A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \operatorname{span}(A)$ πυκνός στον H.

Ισοδύναμα Ένας γραμμικός υπόχωρος E ενός χώρου *Hilbert* H είναι πυκνός (dense) στον H αν και μόνον αν το μόνο διάνυσμα του H που είναι κάθετο στον E είναι το 0.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^{\perp}$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^{\perp}$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^{\perp} = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^{\perp}$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^{\perp} \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^{\perp} = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp}$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
5. $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5. $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6. Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.

Άσκηση

Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό.

1. $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2. Αν H Hilbert: $\quad A^\perp = \{0\} \iff \overline{\operatorname{span} A} = H$.
   span A πυκνό $\iff \nexists\, x \in H \setminus \{0\},\ x \perp A$
3. $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5. $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6. Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $\quad E = E^{\perp\perp}$.
7. Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός. ($\exists$ παράδ. (όταν $\dim H = \infty$) E, F κλειστών, $E \cap F = \{0\}$ όπου $E+F$ όχι κλειστός)

Χώροι Hilbert

Τρία πράγματα:

(1) Ύπαρξη πλησιέστερου διανύσματος, άρα και κάθετου διανύσματος.

(2) Συνεχείς γραμμικές μορφές είναι τα εσωτερικά γινόμενα.

(3) Ύπαρξη ορθοκανονικής βάσης $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.
(Άρα ισομορφισμός με $\ell^2(\Gamma)$)

Συμβολισμός: $\ell^2(n) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$.