1. Δείξτε ότι κάθε συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής A γράφεται στη μορφή A = A+ − A− όπου οι A+ A− είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν A+ A− = A− A+ = 0 και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους. Δείξτε επίσης ότι |A| = A+ + A− .

Ιδέα: $A = A_f$ και $f = f_+ - f_-$ όπου $f_+ = \max\{f, 0\}$

$f_- = f_+ - f$

∃ τέτοια f επειδή A συμπαγής και αυτοσυζυγής

$f_+, f_- \geq 0$

$f = f_+ - f_-$

$f_+ f_- = 0$

$\Leftarrow$

$A_{f_+}, A_{f_-} \geq 0$

$A = A_f = A_{f_+} - A_{f_-}$

$A_{f_+} A_{f_-} = A_{(f_+ f_-)} = 0$

$A_{f_-} A_{f_+} = 0$

Απευθείας Απόδειξη: (Από τ. Φασμ. Θεωρ. γράφω

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου $\{\lambda_n\}$ τα σημεία του $\sigma_p(A)$

$P_n = P(M_{\lambda_n})$

$A = A^* \Rightarrow \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$A_+ = \sum \{\lambda_n P_n : \lambda_n \geq 0\}$$

(τούτο συγκλίνει ως προς $\|\cdot\|$ διότι η υπακολουθία $\{\lambda_n\}$ με $\lambda_n \geq 0$ είναι μηδενική)

$A_- = -\sum \{\lambda_n P_n : \lambda_n < 0\}$ όμοια

προφ. $A_+ \geq 0$, $A_- \geq 0$

$A = A_+ - A_-$

$$A_+ P_n = \begin{cases} \lambda_n P_n, & \lambda_n \geq 0 \\ 0, & \lambda_n < 0 \end{cases} = P_n A_+$$

$$\Longrightarrow A_+(A_-) = A_+\Big(\sum_{\lambda_n < 0} \lambda_n P_n\Big) = \sum_{\lambda_n < 0} \lambda_n \underbrace{A_+ P_n}_{0} = 0$$

και ~~όμοια~~ $A_- A_+ = 0$

[illegible] $|A| = A_+ + A_-$

$$(A_+ - A_-)^2 = A^2 \overset{A = A^*}{=} A^* A = |A|^2$$

$$= \left(\sum_{\lambda_n \geq 0} \lambda_n P_n - \left(- \sum_{\lambda_n < 0} \lambda_n P_n \right) \right)^2$$

$$= \left(\sum_{\lambda_n \geq 0} |\lambda_n| P_n + \sum_{\lambda_n < 0} |\lambda_n| P_n \right)^2 = \left(\sum |\lambda_n| P_n \right)^2 \underset{P_n P_m = 0}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 P_n$$

$$|A|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 P_n$$

$\Downarrow$ [illegible] $\sqrt{}$

$$|A| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| P_n$$

2. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής τελεστής. Δείξαμε ότι ο A γράφεται $A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i y_i^*$ όπου $(x_n), (y_n)$ είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και (λ_i) είναι μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι το σύνολο $\{\lambda_n\}$ εξαρτάται μοναδικά από τον A. Επομένως η παράσταση $\|A\|_1 := \sum_n \lambda_n$ εξαρτάται μόνον από τον A. Όταν $\|A\|_1 < \infty$, ο A ονομάζεται *τελεστής ίχνους (trace class operator)* ή καμιά φορά *πυρηνικός τελεστής (nuclear operator)*.

<u>Απόδ.</u> Αν $A = \sum \lambda_i x_i y_i^*$, πρέπει $\Longrightarrow$ $A y_i = \lambda_i x_i \ \forall i$

$= \sum \mu_i x_i y_i^*$ $\qquad A y_i = \mu_i x_i$

οπότε $\lambda_i = \mu_i$

$A = \sum_j \mu_j u_j v_j^*$, $\{u_j\}$ $\{v_j\}$ ορθοκανονικές ακολουθίες, $\mu_j > 0$

Θέλω να $\{\lambda_i\} = \{\mu_i\}$

επειδή είναι θετικά, αρκεί να

$\{\lambda_i^2\} = \{\mu_i^2\}$

$A = \sum \lambda_i x_i y_i^* \Longrightarrow A^* = \sum \lambda_i y_i x_i^*$ ([illegible])

$$A^*A = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \underbrace{(y_j x_j^*)(x_i y_i^*)}_{\langle x_i, x_j \rangle y_j y_i^*} = \sum_i \lambda_i^2 y_i y_i^*$$

$A^*A y_i = \lambda_i^2 y_i \neq 0$ γιατί $\lambda_i > 0$

ισχύει $y_i \in (\ker A^*A)^\perp$

διότι $y_i = \frac{1}{\lambda_i^2} A^*A y_i \in \mathrm{im}(A^*A) \subseteq \overline{\mathrm{im}(A^*A)} = (\ker A^*A)^\perp$

$y_i \perp (\ker A^*A) = \ker A$

Επειδή A^*A διαγωνοποιείται στο $(\ker A^*A)^\perp$

από την Άσκηση 3 συμπεραίνουμε ότι

το $\{\lambda_i^2 : i \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(A^*A)$

<u>Όμοια</u> από τη γραφή $A = \sum \mu_i u_i v_i^*$

έχω $A^*A v_i = \mu_i^2 v_i$

$\Downarrow$ Άσκ. 3

$\{\mu_i^2 : i \in \mathbb{N}\} = \sigma_p(A^*A) = \{\lambda_i^2 : i \in \mathbb{N}\}$

3. Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δυο και παράγουν τον H.

Προετοιμασία: $\{e_n\}$ ορθ. βάση για H

$$\forall x \in H: \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{συγκλίνει ως } \|\ \|_H$$

Θέτω $S(x) = \{n \in \mathbb{N} : \langle x, e_n \rangle \neq 0\}$

$$x = \sum_{n \in S(x)} \langle x, e_n \rangle e_n \quad \text{(συγκλίνει ανεξάρτητα της διάταξης)}$$

$$\Longrightarrow x \in \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in S(x)\}$$

$$x \perp \{e_n : \langle x, e_n \rangle = 0\}$$

παράδ. $H = L^2([0,2\pi]), \frac{m}{2\pi}$, $e_n(x) = e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$

$\forall f \in H$ (άρα και για κάθε $f \in C[0,2\pi]$) $\langle f, e_n \rangle = \hat{f}(n)$

$$f = \sum_{n \in S(f)} \hat{f}(n) e_n \quad \text{συγκλίνει ως } \|\ \|_2$$

δηλ. $$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \Big\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\not\Downarrow$$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e_k(x) \quad \text{ομοιόμορφα}$$

$\{e_n\}$ δεν είναι βάση Schauder του $(C[0,2\pi], \|\ \|_\infty)$ $\longrightarrow$ $$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \Big\|_\infty \not\longrightarrow 0$$

Όμως Θ. Fejér

$$\Big\| f - \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big) \hat{f}(k) e_k \Big\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$f \in C[0,2\pi]$

είναι SMB
Strong
M-basis

Άρα ισχύει ότι $f \in \overline{\operatorname{span}\{e_k : \hat{f}(k) \neq 0\}}^{\|\ \|_\infty}$

(i) $Ae_n = a(n)e_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ όλα τα $a(n) \in \sigma_p(A)$

Αντίστροφα, αν $\lambda \in \sigma_p(A)$, να δείξω $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a(n) = \lambda$

$\forall x \in M_\lambda$, $\|x\| = 1$

$(A - \lambda I)x = 0 \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

$$0 = (A - \lambda I)x = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle (a(n) - \lambda) e_n}$$

$\Downarrow$

$\langle x, e_n \rangle (a(n) - \lambda) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$x \neq 0 : \exists n : \langle x, e_n \rangle \neq 0$ οπότε $a(n) - \lambda = 0$

οπότε $\lambda \in \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$

άρα $\sigma_p(A) = \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) $\forall \lambda \in \sigma_p(A)$ ορίζουμε $\mathbb{N}_\lambda = \{n \in \mathbb{N} : a(n) = \lambda\}$

Ισχ. $M_\lambda = \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\}$

Αν $n \in \mathbb{N}$ ώστε $a(n) = \lambda$ τότε

$Ae_n = a(n)e_n = \lambda e_n$ άρα $e_n \in M_\lambda$

οπότε $\{e_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\} \subseteq M_\lambda$

$\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\} \subseteq M_\lambda$

Αντίστροφα, $\forall x \in M_\lambda$ τότε $\qquad$ όπου $\forall n$

$x \in \overline{\text{span}}\{e_n : \langle x, e_n \rangle \neq 0\} \qquad \langle x, e_n \rangle (a(n) - \lambda) = 0$

$\subseteq \overline{\text{span}}\{e_n : a(n) - \lambda = 0\}$

$M_\lambda \subseteq \overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\}$

Επιπλέον αν $\lambda \neq \mu$, τα M_λ και M_μ παράγονται από ξένα

ο.κ. σύνολα αφού $\mathbb{N}_\lambda \cap \mathbb{N}_\mu = \emptyset$

άρα $M_\lambda \perp M_\mu$

Τέλος $\overline{\text{span}}\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\} \supseteq \{e_n : n \in \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(A)} \mathbb{N}_\lambda\}$

$\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$

άρα $\quad H \qquad\qquad\qquad \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

4. Έστω H χώρος Hilbert. Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ και $AT = TB$ για κάθε τελεστή $T \in \mathcal{B}(H)$ πεπερασμένης τάξης, να δειχθεί ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ ώστε $A = B = \lambda I$.

Γνωρίζουμε, ότι ουσιαστικά $\mathcal{B}(H)' =$ το κέντρο του $\mathcal{B}(H)$

$$= \{T : AT = TA \ \forall A \in \mathcal{B}(H)\}$$

$$\mathcal{B}(H)' = \{\lambda I : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Από την υπόθεση έχω $\forall\, T = xy^* \neq 0$

$$AT = TB$$

οπότε $\forall z \in H$

$$ATz = \langle z, x\rangle Ay$$
$$\parallel$$
$$TBz = \langle Bz, x\rangle y$$

Επιλέγοντας $z = x \neq 0$

$$Ay = \frac{1}{\|x\|^2}\langle Bx, x\rangle y \quad \forall x \neq 0, \ \forall y \neq 0$$

Αν πάρω $x = x_0$

$$Ay = \underbrace{\frac{1}{\|x_0\|^2}\langle Bx_0, x_0\rangle}_{\lambda} y \quad \forall y$$

$$Ay = \lambda y \quad \forall y \in H$$

οπότε η $AT = TB$ γίνεται

$$TB = \lambda T \quad \forall T \text{ πεπ. τάξης}$$

$$T = xx^*, \ x \neq 0$$

$$xx^*B = \lambda xx^*$$

$$xx^*(Bx) = \lambda xx^*(x)$$

$$\langle Bx, x\rangle x = \lambda \langle x, x\rangle x \quad \text{οπότε}$$

$$\langle Bx, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$$

$$\langle Bx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle \ \forall x \in H$$

$$\Downarrow \text{ polarization}$$

$$\langle Bx, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle \ \forall x, y \in H$$

$$\Downarrow$$

$$B = \lambda I$$

5. Δείξτε ότι κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής: Αν $k \in C([a,b]\times[a,b])$, ο τελεστής $A_k \in \mathcal{B}(L^2[a,b])$ με

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy, \quad f \in C([a,b])$$

είναι συμπαγής.

[Προαιρετικά: Το ίδιο ισχύει όταν $k \in L^2([a,b]\times[a,b])$.]

Απόδ. (i) Πρώτα δείχνουμε ότι $\|A_k\| \le \int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy$

[όταν $k \in L^2[a,b]^2$: ως προς μέτρο]

$$(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y) dy$$

$$|A_k f(x)| \le \int_a^b |k(x,y)|\,|f(y)|\,dy$$

$$\overset{CS}{\le} \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 dy\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int |f(y)|^2 dy\right)^{1/2}}_{\|f\|_2}$$

άρα

$$\|A_k f\|_2^2 \overset{op}{=} \int_a^b |A_k f(x)|^2 dx \le \|f\|_2^2 \int_a^b \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 dy\right) dx$$

$$\|A_k f\|_2 \le \|k\|_{22}\,\|f\|_2 \qquad (*)$$

$\|A_k\| \le \|k\|_{22}$

$$\|k\|_{22} = \left(\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2 dxdy\right)^{1/2}$$

· Αν $k \in L^2([a,b]\times[a,b])$

$\exists\, (s_n)$ απλές μετρήσιμες. $s_n : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$

$\|s_n - k\|_{22}$ (= νόρμα του $L^2([a,b]\times[a,b])$)

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \underbrace{\|A_k - A_{s_n}\|}_{=\|A_{(k-s_n)}\|} \le \|k - s_n\|_{22} \longrightarrow 0$$

Αρκεί τώρα να δω ∀ A_{s_n} είναι τελεστές πεπερασμένης τάξης και ο A_k συμπαγής

$S = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \chi_{E_m}$ απλή μετρήσιμη στο $L^2([a,b]\times[a,b])$

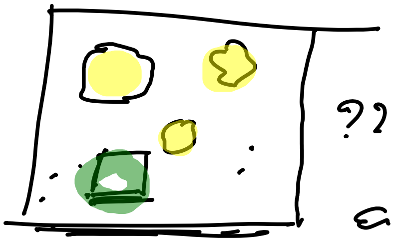
τότε ο αντίστοιχος τελεστής

A_S έχει άπειρη τάξη

Αρκεί να το δείξω για $S = \chi_{E_n}$

$E_n \subseteq [a,b]\times[a,b]$ μετρήσιμο (απλό)

·μπορει ο A_s να εχει απειρη ταξη!



?? $(A_S f)(x) = \int_a^b \chi_{E_n}(x,y) f(y)\,dy$

Ειδική περίπτωση: E_n = ορθογώνιο $\underbrace{[s,t]}_{A}\times\underbrace{[u,v]}_{B}$

$$\chi_{E_n}(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$$

$$(A_S f)(x) = \int_a^b \chi_A(x)\chi_B(y) f(y)\,dy$$

$$\left(\int \chi_B(y) f(y)\,dy\right)\chi_A(x)$$

$A_S f = \langle f, \chi_B\rangle \chi_A$: $A_S = \chi_A \chi_B^*$ πεπερ. τάξης

Επιπλέον πρέπει να προσεγγίσω το k από αθροίσματα απλών μετρήσιμων

$$S = \sum \lambda_m \chi_{E_m}$$

$$= \sum \lambda_m \chi_{A_m \times B_m}$$

πράγματι, αν $k \in L^2([a,b]\times[a,b])$

$\langle k, \chi_{A\times B}\rangle = 0 \ \forall A\times B \subseteq [a,b]\times[a,b]$
μετρήσιμο ορθογώνιο

τότε συμπεραίνω

k μηδενίζεται σ.π. (ως προς $[a,b]\times[a,b]$)
σε κάθε (μετρήσιμο) ορθογώνιο
$A\times B$

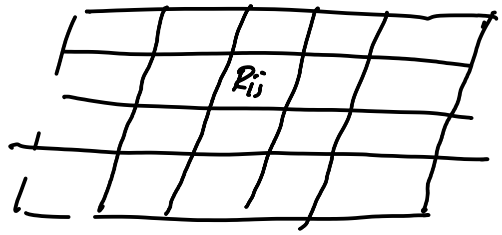
αλλά η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτά περιέχει όλα τα μετρήσιμα σύνολα, άρα
από το [illegible] $\Longrightarrow$ k μηδέν σχεδόν παντού.

Όταν K συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]\times[a,b]$
τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής

$\forall \epsilon>0 \ \exists \delta>0$: όταν $|(x,y)-(s,t)|<\delta$

να έχω $|K(x,y)-K(s,t)|<\epsilon$

τότε μπορώ



με $R_{ij}=A_i\times B_j$ με πλευρά $<\delta$ και τότε αν διαλέξω ένα $(x_i,y_j)\in R_{ij}$

θα έχω $|K(x,y)-K(x_i,y_j)|<\epsilon$ $\forall (x,y)\in R_{ij}$

αν θέσω $S_\epsilon=\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i,y_j)\chi_{R_{ij}}$

και εύκολα προκύπτει

$$\|A_K-A_{S_\epsilon}\|\le\epsilon$$

όμως επειδή S_ϵ είναι απλή ...

λόγω $\chi_{R_{ij}}(x,y)=\chi_{A_i}(x)\,\chi_{B_j}(y)$

6. Δώστε παράδειγμα φραγμένου αυτοσυζυγούς τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν «πιάνει τη νόρμα του» δηλαδή ικανοποιεί $\|Ax\| < \|A\|$ για κάθε $x \in H$ με $\|x\| = 1$.

1η απάντηση: $A = D_a$, $a = \left(\frac{1}{n}\right)$ $\qquad \|A\| = \sup\left\{\left|\frac{1}{n}\right|\right\} = 1$

$\forall x$: $Ax = D_a x = \sum \frac{1}{n}\langle x, e_n\rangle e_n$

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\langle x, e_n\rangle\right|^2 \overset{?}{=} \|A\|^2 \sum |\langle x, e_n\rangle|^2$$

$$= \sum |\langle x, e_n\rangle|^2$$

$$\iff \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)|\langle x, e_n\rangle|^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)|\langle x, e_n\rangle|^2 = 0$ άρα $|\langle x, e_n\rangle|^2 = 0$ $\forall n > 1$

αν $x \neq 0$ άτοπο

όμως $Ae_1 = \frac{1}{1}e_1 = e_1$

$\|A\| = 1 = \|Ae_1\|$

2η απάντηση: $A = D_a$ όπου $a = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$\|A\| = \sup|a(n)| = 1$

Τώρα όμως! $\forall x \in H$

$$\|Ax\|^2 - \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1\right)}_{\neq 0 \ \forall n}|x(n)|^2$$

Έπεται ότι αν $\|Ax\| = \|x\|$ τότε αναγκαστικά $x = 0$

Παρατήρηση: $H = L^2([0,1])$, $A : L^2 \longrightarrow L^2$

$f \longrightarrow Af$

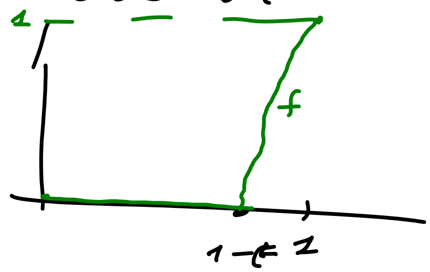
$(Af)(t) = t f(t)$

$$\|Af\|_2^2 = \int_0^1 |t f(t)|^2 dt \le \int_0^1 |f(t)|^2 dt$$

$\Rightarrow \|Af\|_2 \le \|f\|_2$ άρα $\|A\| \le 1$

Ισχύει ότι $\|A\| = 1$

Δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \quad \|A\| > (1-\varepsilon)$



$$\|Af\|_2^2 = \int_0^1 |tf(t)|^2 dt$$

$$= \int_{1-\varepsilon}^1 |tf(t)|^2 dt$$

$$\geq (1-\varepsilon)^2 \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t)|^2 dt$$

$$\geq (1-\varepsilon)^2 \|f\|_2^2$$

άρα: $\|A\| \geq (1-\varepsilon)$

άρα $\|A\| = 1$

νδο $\forall f \in L^2$, $f \neq 0$ έχω πάντα $\|Af\| < \|f\|$

$\iff$ νδο αν $f \in L^2$ ικανοποιεί $\|Af\| = \|f\|$ τότε $f = 0$ στο L^2

Αν $\|Af\| = \|f\|$ $\quad \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 t^2 |f(t)|^2 dt$

δηλ. $\int_0^1 (1-t^2)|f(t)|^2 dt = 0 \quad (*)$

αν η f ήταν συνεχής

$\Downarrow$

$(1-t^2)|f(t)|^2 = 0 \quad \forall t$

$\Downarrow$

$f(t) = 0 \quad \forall t \neq 1$

$\Downarrow$

$f(t) = 0 \quad \forall t$ αφού f συνεχής

άρα $\|Af\| = \|f\|$

για f συνεχή

τότε $f = 0$

Τι γίνεται $\forall f \in L^2$?

$(*) \iff (1-t^2)|f(t)|^2 = 0$ σχεδόν $\forall t$ (ως Lebesgue)

$\exists E \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο $m(E) = 0$

ώστε $(1-t^2)|f(t)|^2 = 0 \quad \forall t \notin E$

$E_1 = E \cup \{1\} \Rightarrow m(E_1) = 0$ (m: Lebesgue)

και $\cancel{(1-t^2)}\,|f(t)|^2 = 0 \quad \forall t \notin E_1$

άρα $|f(t)|^2 = 0$ »

<u>δηλ.</u> $f(t) = 0$ m-σχεδόν παντού

$$\Downarrow$$

$$\int |f(t)|^2 \, dm(t) = 0$$

$$\Downarrow$$

$f = 0$ του $L^2[0,1]$

<u>Παρ.</u> Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε

ότι ο τελεστής αυτός δεν έχει καμία ιδιοτιμή

(δηλαδή ότι το $1 \notin \sigma_p(A)$)