6/5/22

Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙΙ

Παράδοση: 3/5/2022

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι

(α) ισχύει η ισοδυναμία

$$(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP.$$

(β) ο τελεστής $P - Q$ είναι θετικός αν και μόνον αν είναι προβολή.

$P-Q$ προβολή $\Longrightarrow$ θετικός (γνωστό)

R: $\langle Rx, x\rangle = \langle R^2 x, x\rangle = \langle Rx, R^* x\rangle = \langle Rx, Rx\rangle \geq 0$

αντίστροφα $P - Q \geq 0$ δηλ. $\langle (P-Q)x, x\rangle \geq 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow \langle Px, x\rangle \geq \langle Qx, x\rangle$

δηλ. $\operatorname{Im}P \supseteq \operatorname{Im}Q$

$\Rightarrow P - Q =$ προβολή

διότι $Q = PQ$

άρα $P - Q = PQ^\perp$

$= \mathrm{proj}(M \cap N^\perp)$

Θ.Π.Δ.: $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \quad \forall A, B \in$

$(\Longrightarrow)$ πολλ/ζω αριστ. με P

$P(P \vee Q) + P(P \wedge Q) = P(P + Q)$

$P + P\wedge Q = P + PQ$

$\Longrightarrow P \wedge Q = PQ$ δηλ. PQ είναι προβολή

άρα $PQ = (PQ)^* = QP$

$\Rightarrow PQ = QP$

$(\Longleftarrow)$ $PQ = QP$ όπως ξέρω $PQ = P \wedge Q$

όπως πρέπει νδο!

$P \vee Q + PQ = P + Q$ $\qquad$ $\operatorname{Im}P = M$, $\operatorname{Im}Q = N$

δηλ. $P \vee Q = P + Q - PQ = P(I - Q) + Q = P(M \cap N^\perp) + P(N)$

$= P + (I - P)Q = P(M) + P(M^\perp \cap N)$

$PQ^\perp + Q$, $\quad Q + P^\perp Q$

$P(M \cap N^\perp) + P(N) = P(M) + P(M^\perp \cap N)$

νδο $P(M \vee N) = P(\overline{M + N})$

Έχω $M \cap N^\perp + N \supseteq N$

$\quad\; = M + M^\perp \cap N \supseteq M$

$\Big\}$ $M + N \subseteq M \cap N^\perp + N$: κλειστός υποχ.

$\Downarrow$

$\overline{M + N} \subseteq M \cap N^\perp + N \quad (1)$

από την άλλη:

$M \cap N^\perp \subseteq M$, $\; N \subseteq N \Longrightarrow (M \cap N^\perp) + N \subseteq M + N \subseteq \overline{M + N} \quad (2)$

(1) ∧ (2): $(M \cap N^\perp) + N = \overline{M + N}$

δηλ. $P + Q - PQ = P \vee Q$ ισχύει $P + Q = P \vee Q + P \wedge Q$

2. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ έχει πολική αναπαράσταση $T = V|T|$ με $\ker V = \ker T$ δείξτε ότι $V|T|V^* = |T^*|$. Είναι αλήθεια ότι υπάρχει *unitary* $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ ώστε $U|T|U^* = |T^*|$;

Θέτω $A = V|T|V^*$ προφ. $A \geq 0$, $|T^*| \geq 0$

έχω:

$A^2 = V|T|V^*V|T|V^*$ όμως V^*V = προβ. στο αρχ. χώρο της V $= (\ker |T|)^\perp = \overline{\operatorname{Im}|T|}$

άρα $V^*V|T| = |T|$

άρα $= V|T||T|V^*$

$= V|T|(V|T|)^* = TT^* = |T^*|^2$

$\Downarrow$ μοναδικότητα $\sqrt{\ }$

$A = |T^*|$

$A = V|T|V^*$

$\langle Ax, x\rangle = \langle V|T|V^*x, x\rangle = \langle |T|y, y\rangle \geq 0$

$y = V^*x$ διότι $|T| \geq 0$

δηλ $|T^*| \sim |T|$ V: μερ. ισομ.

Ερώτηση: μπορώ: $|T^*| \sim |T|$ U: unitary ?

Όχι γενικά. Πχ

$T = S$ στο $\ell^2(\mathbb{N})$: $Se_n = e_{n+1}$ $\forall n$

$|T|^2 = S^*S = I \Longrightarrow |T| = I$

όμως αν $\exists$ unitary U:

$|T^*| = U|T|U^* = UU^* = I$

θα παίρναμε $|T^*|^2 = I$

δηλ $SS^* = I$ που δεν ισχύει

3. Διατυπώστε και αποδείξτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το γινόμενο (: η σύνθεση) δυο μη μηδενικών μερικών ισομετριών να είναι μη μηδενική μερική ισομετρία.

Παράδειγμα, στο $\ell^2[2]$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U_1: προβολή στο span(e_1+e_2), άρα μερ ισομ με αρχ χώρο = τελ χώρο span(e_1+e_2)

U_2: $e_1 \to e_2$, $e_2 \to 0$, μερ ισομ με αρχ χώρο $[e_1]$, τελ χώρο $[e_2]$

$$U_1U_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$ όχι μερ ισομ

γιατί $\ker(U_1U_2) = [e_2]$, $\ker(U_1U_2)^\perp = [e_1]$

άρα $U_1U_2|_{\ker(U_1U_2)^\perp}$ όχι ισομετρία

Γενικά:

$$U_1U_2 : [(\ker U_2)^\perp] \xrightarrow{U_2} [\mathrm{Im}\,U_2] = \begin{matrix}[(\ker U_1)^\perp] \\ + \\ [\ker U_1]\end{matrix} \xrightarrow{U_1} \begin{matrix}[\mathrm{Im}\,U_1] \\ \\ 0\end{matrix}$$

Πότε είναι η $U_1U_2|_{(\ker(U_1U_2))^\perp}$ ισομετρία;

Ψάχνω ικανές και αναγκαίες συνθήκες

- γεωμετρικού χαρακτήρα (σχέση μεταξύ $\mathrm{Im}\,U_2$ και $\ker U_1$ κλπ)
- αλγεβρικού χαρακτήρα (σχέση ανάμεσα στις αρχ/τελ προβολές των U_1, U_2)

Εύκολες παρατηρήσεις:

- αρκεί κάποια από τα δυο να είναι ισομετρία
- αρκεί U_1, U_2 να είναι προβολές (τότε U_1U_2 προβολή $\Longleftrightarrow$ $U_1U_2 = U_2U_1$. Γεωμετρικά;)

4. Έστω H χώρος Hilbert και $V, P \in \mathcal{B}(H)$ όπου V ισομετρία και P προβολή. Να δειχθεί ότι

$$VP = PVP \iff P = V^*PVP.$$

$(\Rightarrow)$:

$$VP = PVP$$
$$\Downarrow$$
$$V^*VP = V^*PVP \quad \text{αφού } V^*V = I$$
$$\Downarrow$$
$$P = V^*PVP$$

$(\Leftarrow)$ $P = V^*PVP$

$\forall\, x \in H$: $VPx = PVPx \underset{\perp}{+} P^{\perp}VPx$

Άρα: $\|VPx\|^2 = \|PVPx\|^2 + \|P^{\perp}VPx\|^2 \quad (*)$

$\| \quad V$ ισομ.

$\|Px\|^2$

~~$\|Px\|^2 \leq \|PVPx\|^2$~~

$$\|Px\|^2 = \|V^*PVPx\|^2 \underset{\|V^*\| \leq 1}{\leq} \|PVPx\|^2$$

$(*)$: $\|PVPx\|^2 + \|P^{\perp}VPx\|^2 = \|Px\|^2 \leq \|PVPx\|^2$

$$\Downarrow$$

$$\|P^{\perp}VPx\|^2 = 0 \quad \forall x$$

$P^{\perp}VP = 0$ άρα $VP = PVP$

$A \in \mathcal{B}(H, K)$

5. Έστω $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k^*$ όπου οι οικογένειες$\{x_k\}$ και $\{y_k\}$ είναι ορθοκανονικές. Προφανώς $\|A\| \leq \sum_k |\lambda_k|$. Βρείτε ένα μια καλύτερο φράγμα για την $\|A\|$. [Υπόδειξη: τι συμβαίνει όταν $x_k = y_k = e_k$;] Δείξτε ότι το άνω φράγμα που βρήκατε είναι ισότητα.

$\forall x$: $\quad Ax = \sum_{u=1}^{n} \lambda_u (x_u y_u^*)(x)$

$$= \underbrace{\sum \lambda_u \langle x, y_u \rangle x_u}_{\perp \text{ ανα δύο}}$$

x_u ↑ ON

$$\Rightarrow \|Ax\|^2 = \sum_{u=1}^{n} |\lambda_u|^2 |\langle x, y_u \rangle|^2 \cancel{\|x_u\|^2}$$ $= 1$

$$\leq (\max|\lambda_u|^2) \sum_{u=1}^{n} |\langle x, y_u \rangle|^2 \leq (\max|\lambda_u|^2) \|x\|^2$$

y_u ↑ ON, Bessel

$\|A\| \leq \max|\lambda_u|$

ισότητα; Έστω $|\lambda_m| = \max|\lambda_u|$

πάρε $\quad Ay_m = \sum_u \lambda_u \underbrace{\langle y_m, y_u \rangle}_{\delta_{mu}} x_u$

$$= \lambda_m x_m$$

$\Rightarrow \|A\| \geq \|Ay_m\| = \|\lambda_m x_m\| = |\lambda_m|$

για $\|y_m\| = 1$ $\qquad$ για $\|x_m\| = 1$

άρα $\quad \|A\| = \max|\lambda_u|$

6. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάχει n_ϵ ώστε *για κάθε* $x = (x(k)) \in C$ να έχουμε $\sum_{k>n_\epsilon} |x(k)|^2 < \epsilon^2$.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \leq |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

(α) $\forall H$ με $\dim H = \infty$ να αρκεί δείξω $\{x_n\}$ φραγμ. χωρίς συγκλίνουσα υπακολουθία

Αφού $\dim H = \infty$ $\exists \{x_n\}$ απειρ. γραμμ. ανεξάρτητη ακολουθία

Gram-Schmidt : $\exists \{e_n\}$ απειρ. ορθοκανονική ακολουθία

οπότε $e_n \perp e_m$ για $n \neq m$

$\Rightarrow \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$

άρα (e_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίν. υπακολ.

(β) <u>Αρχή</u> Τα πεπερασμ. σύνολα είναι συμπαγή

Αν $C = \{x_1, x_2, \ldots x_m\}$

$\forall \epsilon > 0$ $\forall i \in [m]$ $\exists n_i \in \mathbb{N} : \sum_{k>n_i} |x_i(k)|^2 < \epsilon^2$

τότε $n_\epsilon = \max\{n_1 \ldots n_m\}$ $\quad \sum_{k>n_\epsilon} |x_i(k)|^2 < \epsilon^2$ $\forall i \in [m]$

$(\Longrightarrow)$

Έστω C συμπαγές, τότε είναι ολ. φραγμ.

μπορώ να βρω $x_1 \ldots x_m \in C$

και $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \epsilon/2)$

Τώρα για τα $x_1 \ldots x_m$ κάνουμε

$\exists n_\epsilon : \sum_{k>n_\epsilon} |x_i(k)|^2 < (\epsilon/2)^2$ $\forall i \in [m]$

Έστω $x \in C$: $\exists i \in [m]$

$\|x - x_i\| < \epsilon/2$

άρα $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x_i(k)|^2 < (\epsilon/2)^2$

$$\left(\sum_{k>n_\epsilon} |x(k)|^2\right)^{1/2} \underset{\text{Δ.Ιν.}}{\leq} \left(\sum_{k>n_\epsilon} |x(k) - x_i(k)|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k>n_\epsilon} |x_i(k)|^2\right)^{1/2}$$

$\epsilon/2 + \epsilon/2$ ∎

($\Longleftarrow$) Υποθέτω ότι $\forall \varepsilon>0$ $\forall x \in C$ ισχύει

$$\sum_{k>n_\varepsilon} |x(k)|^2 < \varepsilon^2$$

Νδο C είναι συμπαγές
αρκεί νδο ολικά φραγμένο (διότι είναι κλειστό άρα πλήρες)

ορίζω $P_\varepsilon = \operatorname{proj}(\operatorname{span}(e_1 \ldots e_{n_\varepsilon}))$: φραγμ. τελ. πεπερ. διάστ.

επειδή $\|P_\varepsilon^\perp(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in C \quad (1)$

$C_\varepsilon = P_\varepsilon(C)$ $\quad$ C : φραγμ., P_ε συνεχής

$\Downarrow$

$P_\varepsilon(C)$ φραγμένο

$\subseteq P_\varepsilon(\ell^2)$: χώρος πεπ. διάστασης

$\Downarrow$

$P_\varepsilon(C)$ ολικά φραγμ.

μπορώ να βρω $y_1 \ldots y_m \in P_\varepsilon(\ell^2)$

$$P_\varepsilon(C) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \varepsilon)$$

$\forall x \in C$ $\quad P_\varepsilon(x) \in P_\varepsilon(C)$ άρα $\exists\, i \in [m]$

$P_\varepsilon(x) \in B(y_i, \varepsilon) \quad \|P_\varepsilon(x) - y_i\| < \varepsilon \quad (2)$

$$\|x - y_i\|^2 = \|P_\varepsilon(x - y_i)\|^2 + \|P_\varepsilon^\perp(x - y_i)\|^2$$

$$= \|P_\varepsilon x - \underset{y_i}{\underset{\|}{P_\varepsilon y_i}}\|^2 + \|P_\varepsilon^\perp x - \underbrace{P_\varepsilon^\perp y_i}_{=0}\|^2$$

$$= \|P_\varepsilon x - y_i\|^2 + \|P_\varepsilon^\perp x\|^2$$

$$< \underset{(2)}{\varepsilon^2} + \underset{(1)}{\varepsilon^2}$$

$\|x - y_i\| < \sqrt{2}\,\varepsilon$ δηλ. $x \in B(y_i, \sqrt{2}\,\varepsilon)$

άρα δείξαμε

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \sqrt{2}\,\varepsilon)$$

(γ) : $C_u = \{x \in \ell^2 : \forall k, |x(k)| \le |u(k)|\}$ φραγμ. διότι $\forall x \in C_u$ έχω $\|x\|_2 \le \|u\|_2$

κλειστό γιατί αν (x_i) του C_u με $\|x_i - x\|_2 \to 0$

τότε $\forall k$, $x_i(k) \to x(k)$

αλλά $\forall\, |x_i(k)| \le |u(k)|$

άρα $|x(k)| \le |u(k)| \quad \forall k, x \in C_u$

Αρκεί νδο (β) :

$\forall \varepsilon>0$ $u \in \ell^2$: $\exists n_\varepsilon$: $\sum_{k>n_\varepsilon} |u(k)|^2 < \varepsilon^2$

άρα $\forall x \in C_u$, $\sum_{k>n_\varepsilon} |x(k)|^2 \le \sum_{k>n_\varepsilon} |u(k)|^2 < \varepsilon^2$

∎

7. Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y\rangle| \le |\langle Kx, y\rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \le A \le K$ είναι συμπαγής.

Απάν. $\forall$ ορθοκανονική (x_n) του H ισχύει:

$$\langle Kx_n, x_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Downarrow \; y$$

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle| \le |\langle Kx_n, x_n\rangle| \longrightarrow 0$$

άρα $\forall$ ορθοκ. (x_n):

$\langle Ax_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$ άρα από χαρακτηρισμό $A \in \mathcal{K}(H)$

Αν επιπλέον $K \geq 0$ (και συμπαγής)

$A = A^* \in \mathcal{B}(H)$: αν $-K \le A \le K$

$$\Downarrow$$

$\forall x \in H$

$$-\langle Kx, x\rangle \le \langle Ax, x\rangle \le \langle Kx, x\rangle$$

$\Rightarrow |\langle Ax, x\rangle| \le \langle Kx, x\rangle$

όμως $\forall$ ορθοκανονική (x_n) του H έχω $(K \in \mathcal{K}(H))$

$$\langle Kx_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$$

άρα $\langle Ax_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$ άρα $A \in \mathcal{K}(H)$ ∎

8. Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι συμπαγής τελεστής.

(α) Αν οι $A_n, A \in \mathcal{B}(H_2)$ ικανοποιούν $A_n y \to Ay$ για κάθε $y \in H_2$, δείξτε ότι $\|A_nK - AK\| \to 0$.

(β) Δείξτε ότι το ανάλογο του (α) «από τα δεξιά» δεν ισχύει : δώστε παράδειγμα ακολουθίας (B_n) στον $\mathcal{B}(H_1)$ που ικανοποιεί $B_n x \to 0$ για κάθε $x \in H_1$, αλλά δεν ικανοποιεί $\|KB_n\| \to 0$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) και μια ορθοκανονική βάση στον χώρο $\mathrm{im}K$ (θεωρώντας γνωστό ότι ο $\mathrm{im}K$ είναι πάντα διαχωρίσιμος), δώστε μια άλλη απόδειξη ότι ο K προσεγγίζεται από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.

(α) Θέτω $C_n = A_n - A \in \mathcal{B}(H_2)$ έχω $C_n y \to 0$ $\forall y \in H_2$

νδο $\|C_n K\| \to 0$

K συμπαγής άρα $K(\text{ball } H_1)$ είναι ολικά φραγμένο

οπότε $\forall \epsilon > 0$ $\exists x_1 \ldots x_N$:

$$K(\text{ball } H_1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(Kx_k, \epsilon)$$

δηλ. $\forall x \in \text{ball } H_1$ $\exists k \in [N]$: $\|Kx - Kx_k\| < \epsilon$

όμως, $\forall k \in [N]$ ξέρω ότι $C_n y_k \to 0$ όπου $y_k = Kx_k \in H_2$

$\exists n_k$: $\forall n \geq n_k$ $\|C_n y_k\| < \epsilon$

παίρνω $n_\epsilon = \max\{n_k : k = 1 \ldots N\}$

τότε $\forall n \geq n_\epsilon$ $\forall k$ $\|C_n y_k\| < \epsilon$

τώρα $\forall x \in \text{ball}(H_1)$ $\exists k$: $\|Kx - y_k\| < \epsilon$

τότε
$$\begin{aligned} \|C_n K x\| &\leq \|C_n Kx - C_n y_k\| + \|C_n y_k\| \\ &\leq \|C_n\| \|Kx - y_k\| + \|C_n y_k\| \\ \overset{n \geq n_\epsilon}{} &< \underset{\text{φραγμ?}}{\|C_n\|}\, \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

Ξέρω (C_n) συγκλίνει ΚΑΤΑ ΣΗΜΕΙΟ $\Rightarrow$ κ.σ. φραγμ

~~φραγμ~~ είναι φραγμ τελεστές σε χώρο Banach

Από Αρχή Ομοιόμ Φραγμ:

(C_n) είναι ομοιόμ φραγμ

$\forall y \in H_2$ $\exists M(y)$: $\forall n$ $\|C_n y\| \leq M(y) \|y\|$

$\Downarrow$ ΑΟΦ

$\exists M$: $\forall n$ $\|C_n\| \leq M$

άρα $\forall n \geq n_\epsilon$: $\|C_n K x\| < M\epsilon + \epsilon$

επειδή $x \in \text{ball}(H_1)$ τυχαίο

$\Rightarrow \|C_n K\| \leq M\epsilon + \epsilon$ $\forall n \geq n_\epsilon$

άρα $\|C_n K\| \to 0$

(Αν ξέρω από πριν ότι η (C_n) είναι ομοιόμορφα φραγμ, πχ αν οι C_n είναι προβολές, τότε δεν χρειάζεται η ΑΟΦ)

(c) K συμπ., $C_n \xrightarrow{KG} 0 \Longrightarrow \|C_n K\| \to 0$

(d) " $B_n \xrightarrow{KG} 0 \Longrightarrow \|K B_n\| \xrightarrow{?} 0$

<u>Παρατήρηση</u> απόδ. (x) στο (c):

$\|C_n K\| \to 0 \Longleftrightarrow \|K^* C_n^*\| \to 0$

K συμπ $\Rightarrow K^*$ συμπ.

$B_n \xrightarrow{KG} 0 \Rightarrow B_n^* = C_n \xrightarrow{KG} 0$ ΟΧΙ

οπότ. $\|K B_n\| = \|(B_n^* K^*)^*\|$

$= \|C_n K^*\| \to 0$

ΛΑΘΟΣ

<u>Πχ</u> Στο ℓ^2: $B_n : e_k \longrightarrow e_{k-n}$ όταν $n<k$

$\longrightarrow 0$ α. $n \geq k$

$S^* : e_n \longrightarrow e_{n-1}$

$e_1 \longrightarrow 0$

$B_n = (S^*)^n$

<u>Ισχύει</u> $\|B_n(x)\| \to 0$ διότι

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_n(\langle x, x_k\rangle e_k)$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \langle x, x_k\rangle e_{k-n}$$

$$\|B_n x\|^2 = \sum_{k>n} |\langle x, x_k\rangle|^2 \longrightarrow 0$$

αφού $\sum |\langle x, x_k\rangle|^2 < +\infty$

<u>όμως</u> $B_n^*(x) \not\to 0$

διότι $B_n = (S^*)^n$, $B_n^* = S^n$: ισομετρίες!!

αν πάρω $K = e_1 e_1^*$

$B_n e_{n+1} = e_1$ άρα ($\|B_n e_{n+1}\| = 1 \ \forall n$)

άρα $\|K B_n e_{n+1}\| = \|K e_1\| = \|e_1\| = 1$

άρα $\|K B_n\| \geq \|K B_n e_{n+1}\| = 1$

οπότε $K B_n \not\to 0$

(γ) ΝΔΟ ∀ $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ συμπαγής
προσεγγίζεται από τελεστές πεπερ. τάξης

<u>Απόδ.</u> Αφού θέλουμε προφανώς ότι ο K συμπαγής
τότε ο $\overline{\mathrm{im}K}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος

Έστω μια ΟΚ βάση $\{y_1, y_2, \dots\}$ του $\overline{\mathrm{im}K} \subseteq H_2$

ορίζουμε $P_n = \mathrm{proj}(\mathrm{span}\{y_1, \dots, y_n\})$
= πεπερ. τάξης
άρα είναι φραγμ. πεπερ. τάξης

$\Rightarrow$ $P_n K$ <u>είναι</u> φραγ. πεπερ. τάξης

∀ $y \in \overline{\mathrm{im}K}$ τότε $y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle y, y_k \rangle y_k$

άρα $P_n y = \sum_{k=1}^{n} \langle y, y_k \rangle y_k$

$\|y - P_n y\|^2 = \sum_{k > n} |\langle y, y_k \rangle|^2 \longrightarrow 0$

άρα $P_n y \longrightarrow y$ ∀ $y \in \overline{\mathrm{im}K}$

θεωρούμε $K : H_1 \longrightarrow \overline{\mathrm{im}K} \subseteq H_2$

εφαρμόζω το (α) έχω ότι
$\|P_n K - K\| \longrightarrow 0$

και αυτό θέλαμε να δείξω

[<u>Εδώ</u> δεν χρειάζεται η ΑΟΦ
γιατί $\{P_n\}$ είναι από πριν
ομοιομ. φραγμ.