Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙ
Παράδοση: 13 Απριλίου 2022

1. (α) Αν $\dim H < \infty$, δείξτε ότι κάθε ισομετρία $S \in \mathcal{B}(H)$ είναι επί, μάλιστα είναι unitary.

(β) Αν $\dim H = \infty$, δείξτε υπάρχουν δυο ισομετρίες $S_1, S_2 \in \mathcal{B}(H)$ με $\mathrm{im}(S_1) \perp \mathrm{im}(S_2)$.

(α) S ισομετρία $\Rightarrow$ S είναι 1-1

Αν $\{e_1, \dots, e_n\}$ βάση του H

τότε $\{Se_1, \dots, Se_n\}$ γραμμικά ανεξ. στο H

επειδή είναι $n = \dim H$ $\Rightarrow$ αποτελούν βάση του H

και ισομετρία άρα ο S είναι επί

για $\forall y \in H$ γράφεται $y = \sum c_n S e_n$

$= S(\sum c_n e_n) \in \mathrm{Im} S$

ισομετρία + επί $\Rightarrow$ unitary

(β) Όταν $\dim H = +\infty$ το (α) δεν ισχύει:

$S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ $\quad Se_n = e_{n+1}$ $\forall n$: S ισομετρία

αλλά $e_1 \notin \mathrm{Im} S$: δεν ισχύει

να βρούμε S_1, S_2 ισομετρίες με $\mathrm{Im} S_1 \perp \mathrm{Im} S_2$

κλειστοί διότι S ισομετρία

να βρούμε S_1, S_2 : $\mathrm{Im} S_1 = \overline{\mathrm{span}}\{e_{2n-1}\}$

$\mathrm{Im} S_2 = \overline{\mathrm{span}}\{e_{2n}\}$

$S_1(e_n) = e_{2n+1}$ $\forall n$ και επεκτείνω

$S_2(e_n) = e_{2n}$ $\forall n$ με γραμμικότητα.

$S_1(x(1), x(2), x(3), \dots) = (x(1), 0, x(2), 0, x(3), 0, x(4), 0, \dots)$

$S_2(\qquad) = (0, x(1), 0, x(2), 0, x(3), 0, \dots)$

2. Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Ο T απεικονίζει *μια* ορθοκανονική βάση του H_1 σε ορθοκανονικό ~~σύνολο~~. βάση

(β) Ο T απεικονίζει *κάθε* ορθοκανονική βάση του H_1 σε ορθοκανονικό ~~σύνολο~~. βάση

(γ) Ο T είναι ισομετρία. + επί

Διατυπώστε κι αποδείξτε αντίστοιχες ισοδύναμες συνθήκες με την «ο T είναι unitary».

(α) $\Rightarrow$ (β) Έστω T στέλνει μια ON βάση $\{e_k\}$ σε ON σύνολο

και έστω $\{f_k\}$ μια άλλη ON βάση

$\forall f_k \in \overline{\text{span}}\{e_n\}$: $\exists$ $f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_k, e_n \rangle e_n$ (συγκλίνει)

$$\Downarrow$$

$$T f_k \underset{\text{συν}}{\overset{\text{φρ}}{=}} \sum_n \langle f_k, e_n \rangle T e_n$$

$$\langle T f_k, T f_\lambda \rangle = \Big\langle \sum_n \langle f_k, e_n \rangle T e_n, \sum_m \langle f_\lambda, e_m \rangle T e_m \Big\rangle$$

$$= \sum_{n,m} \langle f_k, e_n \rangle \overline{\langle f_\lambda, e_m \rangle} \underbrace{\langle T e_n, T e_m \rangle}_{\delta_{nm}}$$

$$= \sum_n \langle f_k, e_n \rangle \langle e_n, f_\lambda \rangle$$

$$\underset{=}{\text{Parseval}} \quad \langle f_k, f_\lambda \rangle = \delta_{k\lambda}$$ ∴ άρα $\{T f_k\}$ είναι ON

(β) $\Rightarrow$ (α) προφανές

(α) $\Rightarrow$ T ισομετρία: $\forall x \in H_1$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

$$T x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \underbrace{T e_n}_{ON}$$

$$\| T x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \overset{\text{Pars}}{=} \|x\|^2$$

T ισομετρία $\Rightarrow \langle T e_k, T e_\lambda \rangle = \langle T^* T e_k, e_\lambda \rangle = \langle e_k, e_\lambda \rangle$

$T^* T = I$ άρα $\{T e_k\}$ είναι ON

2ο μέρος T unitary $\Longleftrightarrow$ T ισομετρία και επί

$\Longleftrightarrow$ T στέλνει μία/κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_k\}$ σε ορθοκανονικό σύνολο $\{T e_k\}$

θα είναι αναγκαστικά ON βάση γιατί αλλιώς

θα $\exists\, y \in H_2$ $y \perp \{T e_k : k \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow y \perp \text{span}\{T e_k\}$

$\Rightarrow y \perp \overline{\text{span}\{T e_k\}} = H_2$ (T επί)

$\Rightarrow y = 0$

3. (α) Αν $X \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $Y \in \mathcal{B}(H_2)$ θετικός, δείξτε ότι ο $X^*YX \in B(H_1)$ είναι θετικός τελεστής.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικοί τελεστές, δείξτε ότι $\ker(A+B) = \ker A \cap \ker B$.

Απαν (α) νδο $\forall \xi \in H_1$, $\langle X^* Y X\xi, \xi \rangle \geq 0$

$$\langle Y(X\xi), (X\xi) \rangle = \langle Y\eta, \eta \rangle \geq 0 \quad \forall \eta = X\xi$$

γιατί $Y \geq 0$

(β): $\ker A \cap \ker B \subseteq \ker(A+B)$

γιατί αν $Ax = 0$ και $Bx = 0 \Rightarrow (A+B)x = 0 + 0$

αντίστροφα αν $(A+B)x = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} Ax = 0 = Bx$

$$\Downarrow$$

$$\langle (A+B)x, x \rangle = 0$$

άρα $\underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle Bx, x \rangle}_{\geq 0} = 0$

άρα $\langle Ax, x \rangle = 0$ και $\langle Bx, x \rangle = 0$

$\Downarrow$ $\exists!\ A^{1/2} \geq 0$

$$\langle A^{1/2} A^{1/2} x, x \rangle = 0$$

$$\langle A^{1/2}x, A^{1/2}x \rangle = 0 \Rightarrow \|A^{1/2}x\| = 0$$

$$\Rightarrow A^{1/2}x = 0$$

$$\Rightarrow A^{1/2}A^{1/2}x = 0 \text{ δηλ. } Ax = 0$$

όμοια $Bx = 0$

Επειδή $A \geq 0$ έχω γενικευμένη C–S!

$$\|Ax\|^2 \leq \|A\| \langle Ax, x \rangle$$

άρα $\|Ax\|^2 = 0$ άρα $Ax = 0$

4. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{smallmatrix}\right]$, δηλαδή $T = \left[\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix}\right]$.

Να δειχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \right\rangle := \langle x, u \rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2} \,.)$$

operator space theory

$(\mathcal{A}, \|\ \|)$: ~~...~~ χώρος τελεστών $\subseteq \mathcal{B}(H)$

$(M_n(\mathcal{A}), \|\ \|)$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$

$M_n(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(\underbrace{H \oplus \cdots \oplus H}_{n\text{-φορές}})$

Choi - Effros

J-Z Ruan

Απόδ.

$$T = \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - A^*A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \text{''}$$

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^* & A^*A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - A^*A \end{bmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} = T$$

Υπόθεση $\|A\| \leq 1 \iff \|A^*A\| \leq 1 \implies A^*A \leq I \iff I - A^*A \geq 0$

$$\implies \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - A^*A \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X^*X \geq 0$$

οπότε $(*) \implies T =$ άθροισμα 2 θετικών

Αντίστροφο:

$$0 \leq \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix}$$

$$0 \leq \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & -I \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} I & A \\ A^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^* & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A - A \\ 0 & A^*A - I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - A^*A \end{bmatrix} \geq 0 \implies I - A^*A \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\|A\| \leq 1$$

Κλασική λύση: πρέπει $T = T^*$

$$\langle T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\rangle = \langle \begin{bmatrix} x + Ay \\ A^* x + y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rangle$$

$$= \langle x + Ay, x\rangle + \langle A^* x + y, y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle Ay, x\rangle + \langle A^* x, y\rangle + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + \langle Ay, x\rangle + \overline{\langle Ay, x\rangle} + \|y\|^2 \quad (1)$$

Έστω $T \geq 0$ τότε $(1) \geq 0 \ \forall x, y$

Θέτω $x = -Ay$

$$(1): \ \|-Ay\|^2 - \langle Ay, Ay\rangle - \langle Ay, Ay\rangle + \|y\|^2$$

άρα $-\|Ay\|^2 + \|y\|^2 \geq 0$ άρα $\|Ay\|^2 \leq \|y\|^2 \ \forall y$

$\Longrightarrow \|A\| \leq 1$

Antistrophy: $\|A\| \leq 1$ ~~για~~ $\|x\|, \|y\| \leq 1$

Επειδή $|\langle Ay, x\rangle| \leq \|A\| \|x\| \|y\| \leq 1$

$\Longrightarrow \left(-1 \leq \langle Ay, x\rangle \leq 1 \ \text{όχι} \ \langle Ay, x\rangle \notin \mathbb{R} \right)$

$\Longrightarrow |Re\langle Ay, x\rangle| \leq 1$

$\Longrightarrow -1 \leq Re\langle Ay, x\rangle \leq 1$

Από το (1): $\forall x, y$ νόρμες ≤ 1

$$\underbrace{\langle T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\rangle}_{\geq 0 \ \forall x,y \ \text{νόρμες} \leq 1} = 1 + 2Re\langle Ay, x\rangle + 1 \geq 1 - 2 + 1 \geq 0$$

$\Longrightarrow \geq 0 \ \forall x, y$

5. Θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & W \end{bmatrix}$ όπου $X, Y, W \in \mathcal{B}(H)$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.

Πρώτα $T^* = \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ Y^* & W^* \end{bmatrix}$ ✓

$$\left\langle T^* \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle \overset{\text{op}}{=} \left\langle \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, T \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Xu + Yv \\ Wv \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$= \langle \xi, Xu + Yv \rangle + \langle \eta, Wv \rangle$$

$$= \langle X^* \xi, u \rangle + \langle Y^* \xi, v \rangle + \langle W^* \eta, v \rangle$$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} X^* & 0 \\ Y^* & W^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle$$

Αν $T \geq 0$ άρα $T = T^*$ οπότε $X^* = X$, $W^* = W$ και $Y = 0$

Αυτές οι συνθήκες είναι και ικανές διότι αν

$T = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$ αυτοσυζυγής και

$$\left\langle T \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} X\xi \\ W\eta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right\rangle = \langle X\xi, \xi \rangle + \langle W\eta, \eta \rangle$$

$X, W \geq 0$

$\geq 0 \quad + \quad \geq 0$

άρα $T \geq 0$

6. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, είναι αλήθεια ότι ο χώρος $T(H_1)$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H_2; [Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

$D_a : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$(x(n)) \longrightarrow (a_n x(n))$

Αν πάρω πχ $a_n = \frac{1}{n}$ $\forall n$ τότε $Im D_a \supseteq \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

άρα $\overline{Im D_a} = \ell^2$

Αλλα ο D_a δεν ειναι επι

γιατι το $(\frac{1}{n}) \in \ell^2$ δεν ανηκει

στην $Im(D_a)$

~~άρα~~ $\overline{Im D_a} \neq Im D_a$

7. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Να δειχθεί ότι $\overline{A(H_1)} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$. Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$. Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$;

- $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$ ✓

αν $x \in \ker A$ και $\forall y = A^*z \in A^*(H_2)$ έχω

$\langle x, y\rangle = \langle x, A^*z\rangle = \langle Ax, z\rangle = 0$

άρα $x \perp y$

οπότε $\ker A \subseteq (A^*(H_2))^\perp$

Αντίστροφα, αν $\xi \perp A^*(H_2)$ τότε $\forall \eta \in H_2$

$\langle A\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A^*\eta\rangle = 0 \Rightarrow A\xi = 0 \Rightarrow \xi \in \ker A$

- Εφαρμόζω αυτό για τον $A^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$

$\ker A^* = (A(H_1))^\perp$

$\Updownarrow \perp$

$(\ker A^*)^\perp = (A(H_1))^{\perp\perp} = \overline{A(H_1)}$

- Ρωτάει αν $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$: Ισχύει αν-ν $A^*(H_2)$ κλειστός $\Rightarrow$ όχι πάντα

- Για τον $\ker(A^*A)$:

$\forall x \in H_1$: $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle$

άρα αν $A^*Ax = 0$ τότε $Ax = 0$ (και αντίστροφα, προφανώς)

άρα $\ker(A^*A) = \ker A$

αποδείξαμε ότι $|A| \overset{\text{ορ}}{=} (A^*A)^{1/2}$

οπότε $A^*A = |A|^2$

άρα $\ker(A^*A) = \ker(|A|^*|A|) = \ker(|A|)$

$\ker A = \ker|A| = \ker(A^*A)$

$\neq \ker AA^*$ αν $A = S$: δεξιά μετατόπιση

τότε $A^*A = I$, $\ker A^*A = \{0\}$

ενώ $A^*e_1 = 0$

οπότε $\ker(AA^*) = \ker(A^*) \neq \{0\}$

8. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ και $A = U|A|$ η πολική αναπαράσταση του A, όπου U μερική ισομετρία με $\ker U = \ker A$. Δείξτε ότι ο U^*U είναι η προβολή στον χώρο $(\ker A)^\perp$, ο UU^* είναι η προβολή στον χώρο $(\ker A^*)^\perp$, και ότι $U^*A = |A|$.

Αν $H_1 = H_2$ και $A^*A = AA^*$, είναι αλήθεια ότι $UU^* = U^*U$;

• νδο $U^*U = P((\ker A)^\perp)$ $\quad (\ker A)^\perp = M$ από την υπόθ. $M = (\ker U)^\perp$

έστω $P = P(M)$

$\forall x, y \in H_1$.

$x = Px + P^\perp x$

$Ux = UPx + UP^\perp x = UPx$ γιατί $U|_{M^\perp} = U|_{\ker U} = 0$

$\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle \underset{\in M}{UPx}, \underset{\in M}{UPy}\rangle$ $\quad U|_M$ ισομετρία άρα $\langle U\xi, U\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$ $\forall \xi, \eta \in M$

$= \langle Px, Py\rangle$

$= \langle P^*Px, y\rangle$ $\quad P^*P = P^2 = P$

$= \langle Px, y\rangle$

άρα $U^*U = P$

• νδο $U^*A = |A|$

Απόδ. $A = U|A| \Longrightarrow U^*A = U^*U|A| = P|A|$

$\forall x \in H_1$: $U^*Ax = P\underbrace{|A|x}_{\in \operatorname{Im}|A|}$, $\operatorname{Im}|A| = (\ker|A|)^\perp = (\ker A)^\perp = M$

$= |A|x$

$M_0 = \operatorname{Im}|A|$, $M = \overline{\operatorname{Im}|A|} = (\ker|A|)^\perp = (\ker A)^\perp \subseteq H_1$

$N_0 = \operatorname{Im}A$, $N = \overline{\operatorname{Im}A} = (\ker A^*)^\perp = (\ker|A^*|)^\perp \subseteq H_2$

$U : \operatorname{Im}|A| \longrightarrow \operatorname{Im}A$ ισομετρία επί

$|A|x \longmapsto Ax$

$U : \overline{\operatorname{Im}|A|} \longrightarrow \overline{\operatorname{Im}A}$ " "

$M \longrightarrow N$

$U^* : N \longrightarrow M$ ισομετρία επί

προκύπτει, δείχνοντας ότι $U^*Ax = |A|x$ άρα $U^* : N_0 \to M_0$

$\|U^*(Ax)\|^2 = \||A|x\|^2 = \langle |A|x, |A|x\rangle$

$= \langle |A|^2x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle$

$= \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$

άρα $U^* : N_0 \longrightarrow M_0$ ισομετρία

$\Rightarrow U^* : N \longrightarrow M$ "

Επ: Αν $y = |A| x \in M_0$

θέτω $z = Ax \in N_0$ έχω

$U^* z = U^* A x = |A| x = y$

άρα $U^* : N_0 \twoheadrightarrow M_0$ (επί)

άρα $U^* : N \twoheadrightarrow M$ (επί)

Μένει να $U^* \Big|_{(\overline{Im A})^\perp} = 0$ ✓

πράγματι, αν $z \in (\overline{Im A})^\perp = (Im U)^\perp$ και $\forall x \in H$ έχω

$\langle U^* z, x \rangle = \langle z, \underset{Im U}{U x} \rangle = 0 \Rightarrow U^* z = 0$

Τέλος, αν $A \in B(H)$ με $A^* A = A A^*$

$\Downarrow$

$|A|^2 = |A^*|^2$

$\Downarrow$

$|A| = |A^*|$

$\Downarrow$

$\ker |A| = \ker |A^*|$

$\ker A \qquad \ker A^*$

$U^* U = P((\ker A)^\perp)$ άρα $U^* U = U U^*$

$U U^* = P((\ker A^*)^\perp)$

Αλλιώς $A = U|A|$

"προσεγγιστικά" : $Ax = U|A|x$

προσοχή! $U = A|A|^{-1}$ δεν ορίζεται

μπορώ όμως,

$$U y = \lim_{n \to \infty} A\left(|A| + \tfrac{1}{n} I\right)^{-1} y$$

$|A|$ μπορεί να μην είναι 1-1

αλλά είναι ≥ 0

όπως $|A| + \frac{1}{n} I$ είναι "$\geq \frac{1}{n} I$"

όπως $|A| + \frac{1}{n} I$ έχει αντίστροφο

άρα ο $A\left(|A| + \frac{1}{n} I\right)^{-1}$ έχει νόημα

και προκύπτει ότι

$A\left(|A| + \frac{1}{n} I\right)^{-1} y \longrightarrow U y$

$\Rightarrow$ Ειδική περίπτωση: $y = |A| x$ $\qquad U|A|x = Ax$

αν $\ker |A|$ ισχύει ένωση

$A\left(\underbrace{|A| + \tfrac{1}{n} I)^{-1} |A| x}_{\to x}\right)$