Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις I (διορθ.)

1. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\langle x, y \rangle\rangle|^2 \leq \langle\langle x, x \rangle\rangle \langle\langle y, y \rangle\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

2. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.
2) $A^\perp = (\overline{\text{span}\, A})^\perp$.
3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.
5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.
6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $\quad E = E^{\perp\perp}$.
7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $\quad E + F$ κλειστός.

3. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

4. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H.

(α) Αν $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

(β) Αν η $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική *βάση* του H, δείξτε ότι κάθε $y \in H$ ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου

$$\{y_n : \langle y, y_n \rangle \neq 0\}\,.$$

5. Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0, 1])$.

6. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $f \in C([0, 1])$ να ισχύει η ανισότητα

$$\left| \int_0^1 t f(t) dt \right| \leq C \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} .$$

Βρείτε την βέλτιστη (δηλ. την μικρότερη δυνατή) τιμή της C.

7. Στον χώρο $M_n = M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων, ορίζουμε

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(B^* A), \; A, B \in M_n$$

(εδώ $[b_{ij}]^* = [\bar{b}_{ji}]$). Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο. Γενικότερα, αν $\rho \in M_n$ και θέσουμε $\langle A, B \rangle_\rho := \text{Tr}(\rho B^* A), \; A, B \in M_n$, πότε είναι το $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ εσωτερικό γινόμενο στον M_n;

8. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to \mathbb{C} \to F : x \mapsto \langle x,u\rangle \mapsto \langle x,u\rangle v$$

παρ/γ $E = F = \ell^2[n]$: $e_i e_j^*$: $e_j \to e_i$, $e_k \to 0$, $k \neq j$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

$e_i e_j^*$ έχει πίνακα $E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

- Δείξτε ότι ο συζυγής του vu^* είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$.
- Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0?
- Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E,F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}$, $u_k \in E, v_k \in F$. Ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του N; $N = \min\{n, m\}$
- Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \dots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \dots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F. $N = \dim E$ $N = \dim F$
- Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές?

Γενικότερα, αν E έχει $\dim E = m$, F έχει $\dim F = n$

ON βάση $\{e_1 \dots e_m\}$ του E και ON βάση $\{f_1 \dots f_n\}$ του F

τότε $f_i e_j^* : e_j \to f_i$ στο F
$e_k \to 0$, $k \neq j$

$\mathcal{L}(E,F)$

$\{f_i e_j^* : i \in [n], j \in [m]\}$ είναι (αλγ) βάση του $\mathcal{B}(E,F)$

Απόδ (i) γραμμ. ανεξ: $\sum_{i,j} c_{ij} f_i e_j^* = 0$

$\forall e_k \quad (\quad)(e_k) = 0$

$$\sum_{i=1}^n c_{ik} f_i = 0 \quad \forall k \in [m]$$

αλλά το $\{f_i : i \in [n]\}$ είναι γραμμ. ανεξ.

$\Rightarrow c_{ik} = 0 \quad \forall i \in [n] \ \forall k \in [m]$

(ii) παράγει το $\mathcal{L}(E,F)$

Ισχυρ. $\forall A \in \mathcal{B}(E,F)$ τότε

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} f_i e_j^* \quad \text{όπου } a_{ij} = \langle Ae_j, f_i\rangle \ (ON)$$

Απόδ $\lambda \in [m], k \in [n]$

$$\Big\langle \sum_{i,j} a_{ij} f_i e_j^*(e_\lambda), f_k \Big\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \langle \underbrace{\langle e_\lambda, e_j\rangle}_{\lambda = j} f_i, f_k\rangle$$

$$= \sum_i a_{i\lambda} \langle f_i, f_k\rangle = a_{k\lambda} = \langle Ae_\lambda, f_k\rangle$$

Άρα και $\forall \xi \in E, \forall \eta \in F$

$$\Big\langle \sum_{i,j} a_{ij} f_i e_j^* \xi, \eta \Big\rangle = \langle A\xi, \eta\rangle$$

$\Downarrow$ ON

Θα δείξω ότι $\exists\, v_j \in F$ ώστε

$$A = \sum_{j=1}^n v_j e_j^* \qquad n = \dim F$$

ON

Απόδ $\forall x \in E, \forall y \in F$ $\{e_j\}$ είναι ON βάση του E, $A^* y \in E$

$$A^* y = \sum_{j=1}^{m} \langle A^* y, e_j \rangle e_j \quad \text{(Parseval)}$$

$$\langle A^* y, x \rangle_E = \sum_{j=1}^{n} \langle A^* y, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle$$

$\parallel$ ορ του A^*

$$\langle y, Ax \rangle = \sum \langle y, \underbrace{A e_j}_{= v_j} \rangle \langle e_j, x \rangle$$

$$= \sum_j \langle y, \overline{\langle e_j, x \rangle}\, v_j \rangle$$

$$= \sum_j \langle y, \langle x, e_j \rangle v_j \rangle = \sum_j \langle y, (v_j e_j^*)(x) \rangle$$

άρα: $\langle y, Ax \rangle = \langle y, \left(\sum_j v_j e_j^*\right) x \rangle$

οπότε: $\boxed{A = \sum^{m} v_j e_j^*}$ όπου $m = \dim E$

Εφαρμόζω ό,τι για $B = A^* : F \to E$

οπότε $\exists\, w_i \in E$ ώστε

$$B = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i^*$$ όπου $n = \dim F$

άρα $A = B^* = \sum_{i=1}^{n} (w_i f_i^*)^* = \boxed{\sum_{i=1}^{n} f_i w_i^*}$

9. Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, ορίζουμε $\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \frac{dt}{2\pi}$. $= \langle f, f_n \rangle_{L^2([-\pi,\pi])}$

Δείξτε ότι η απεικόνιση

$f \longmapsto (\langle f, f_n \rangle)_{n \in \mathbb{Z}}$ $\qquad f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{F}_0 : (C([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \mapsto (\hat{f}(n))_n$$

επεκτείνεται σε (γραμμική) ισομετρία από τον $L^2([-\pi, \pi])$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

πρώτα $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ο.κ. για L^2:

$$\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} \frac{dt}{2\pi} = \begin{cases} \frac{2\pi}{2\pi} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ = τριγ. πολυώνυμα = span$\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathcal{F}_0 : f_n \to e_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$

γραμμ.: $\mathcal{F}_0 : \mathcal{T} \to \ell^2(\mathbb{Z})$ ισομετρικά

$$\|\mathcal{F}_0 f\|_{\ell^2}^2 = \|(\langle f, f_n \rangle)\|_{\ell^2}^2 = \sum |\langle f, f_n \rangle|^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

$\Rightarrow$ επεκτείνεται σε ισομετρία

$$\underbrace{\overline{\mathcal{T}}^{\|\ \|_{L^2}}}_{\overset{?}{=}\, L^2([-\pi,\pi])} \longrightarrow \underbrace{\overline{\text{span}\{e_n\}}^{\|\ \|_{\ell^2}}}_{=\, \ell^2(\mathbb{Z})}$$

δηλ. ο χώρος των Δ πολ. είναι $\|\ \|_2$-πυκνός στον $L^2([-\pi,\pi])$

Το ξέρω γιατί ως το είπε ο κ. Γιαννόπουλος

Ξέρω ότι $\forall f \in C[-\pi,\pi]$ $\exists (f_k)$ από τριγ. πολ.

τ.ω. $f_k \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$

(θεώρημα Fejér)

$f_k = \sigma_k(f)$

δηλ. $\|f_k - f\|_\infty \longrightarrow 0$

όμως $\|f_k - f\|_{L^2} \leq \|f_k - f\|_\infty$

$\left(\int |f_k - f|^2\right)^{1/2} \leq \sup|f_k - f| \frac{2\pi}{2\pi}$

οπότε $f_k \xrightarrow[\|\ \|_{L^2}]{} f$ ως τη πλήρωση του $(C, \|\ \|_2)$

οπότε, $\forall g \in L^2([-\pi,\pi])$ ξέρω (απ' τον ορισμό του L^2)

$\forall \epsilon > 0$ $\exists f_\epsilon \in C[-\pi,\pi]$: $\|g - f_\epsilon\|_2 < \epsilon/2$

Fejér $\exists p_\epsilon \in \mathcal{T}$: $\|f_\epsilon - p_\epsilon\|_2 < \epsilon/2$ (*)

(*) άρα $\|g - p_\epsilon\|_2 < \epsilon$

έδειξα ότι $\overline{\mathcal{T}}^{\|\ \|_2} = L^2$

άρα η $\mathcal{F}_0$ επεκτείνεται σε $\mathcal{F} : L^2([-\pi,\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ και δείξαμε προηγουμένως ότι είναι επί