Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις Ι

1. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle|^2 \leq \langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \underline{\underline{\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle = 0}}\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

(α) $\forall x \in N$ και $\forall y \in E$

$$|\langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle|^2 \leq \underbrace{\langle\!\langle x, x \rangle\!\rangle}_{0} \langle\!\langle y, y \rangle\!\rangle = 0$$

$$N \subseteq \{x \in E : \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle = 0 \ \forall y \in E\} \subseteq N$$

άρα $\quad \| \quad N$ $\quad$ γραμμ. χώρο

$$N = \bigcap_{y \in E} \underbrace{\{x \in E : \langle\!\langle x, y \rangle\!\rangle = 0\}}_{\text{πυρήνας γραμμ. μορφής άρα γραμμ. υπόχ.}}$$

(β) E/N : $\forall x \in E$ ονομάζω

$$x + N = [x] = \{x + z : z \in N\} \subseteq E$$

$$E/N = \{[x] : x \in E\}$$

ορίζω: $[x] + [y] := [x + y]$ καλά

$\lambda [x] := [\lambda x]$ ορισμένα

διότι αν $[x] = [x']$

τότε $[x] + [y] = [x'] + [y]$

κλπ

Αλλιώς $q : E \to E/N : x \mapsto [x]$

γραμμική και επί με πυρήνα $= N$

Ορίζω στο E/N:

$$\underline{\langle [x],[y]\rangle := \langle\langle x,y\rangle\rangle}$$

<u>καλά ορισμένο</u>

δηλ. δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους

δηλ. αν $[x]=[x']$, $[y]=[y']$

τότε $\langle [x],[y]\rangle = \langle [x'],[y']\rangle$

<u>Απόδ.</u> $[x]=[x'] \Longrightarrow x-x' \in N \overset{(ε)}{\Longrightarrow} \langle\langle x-x',y\rangle\rangle = 0 \quad \forall y\in E$

$\Longrightarrow \langle\langle x,y\rangle\rangle = \langle\langle x',y\rangle\rangle \quad \forall y \in E$

$\Longrightarrow \langle [x],[y]\rangle = \langle [x'],[y]\rangle \quad \forall [y] \in \underline{E/N}$

Ομοίως αν $[y]=[y']$ τότε $\forall [x] \in E/N$

$\langle [x],[y]\rangle = \langle [x],[y']\rangle$

$\quad\quad \|$ δηλαδή $\quad$ όταν $[x]=[x']$ και $[y]=[y']$

$\langle [x'],[y']\rangle$

η γραμμικότητα ως προς $[x]$ } έπονται άμεσα
η Ερμιτιανή ιδιότητα } από τις αντίστοιχες της $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$

και τέλος αν $\langle [x],[x]\rangle = 0$

τότε $\langle\langle x,x\rangle\rangle = 0$ οπότε $x\in N$

δηλ. $[x]=[0]$

άρα το $\langle\ ,\ \rangle$ είναι

όντως εσωτ. γινόμενο

__Παρ/γ__ E = Riemann-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[0,1]$

και $$\langle\langle f, g\rangle\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

$$\langle\langle f, f\rangle\rangle = 0 \iff \int_0^1 |f(t)|^2\,dt = 0 \;\not\Rightarrow\; f(t)=0 \quad \forall t$$

$$N = \{ f \in E : \langle\langle f, f\rangle\rangle = 0 \}$$

$$= \{ f \in E : f(t) = 0 \text{ σχεδόν } \forall t \}$$

(μέτρο Leb)

$$E/N = \{ [f] : f \in E \}$$

$$[f] = \{ g \in E : f = g \text{ σχ. παντού} \}$$

2. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

✓ 1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.

✓ 2) $A^\perp = (\overline{\text{span}\, A})^\perp$.

✓ 3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

✓ 4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $E = E^{\perp\perp}$.

7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $E + F$ κλειστός.

(5): Αφού $A \subseteq A^{\perp\perp}$

$\Downarrow$

$(A^{\perp\perp})^\perp \subseteq A^\perp$

νδο $=$

Παίρνω $x \in A^\perp$ νδο $x \in A^{\perp\perp\perp}$ δηλ. $\forall y \in A^{\perp\perp}$ ισχύει $\langle x, y \rangle = 0$

$y \in A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$ δηλ. $\langle y, z \rangle = 0 \ \forall z \in A^\perp$

αλλά $x \in A^\perp$ οπότε $\langle y, x \rangle = 0$

άρα $\langle x, y \rangle = 0$ όπως θέλαμε.

(6) Έχουμε $E \subseteq E^{\perp\perp}$ νδο ισότητα

αν $\neq$ άρα $E^{\perp\perp}$ είναι κλειστός υπόχ. χώρου Hilbert

Είναι χώρος Hilbert

$\exists z \in E^{\perp\perp}$, $z \neq 0$, $z \perp E$

δηλ. $z \in E^\perp$, $z \in E^{\perp\perp} = (E^\perp)^\perp$

οπότε $\langle z, z \rangle = 0$

άρα $z = 0$ αντίφαση

β' τρόπος Έστω $x \in E^{\perp\perp}$ νδο $x \in E$

Επειδή H Hilbert το x γράφεται μοναδικά

$x = x_E + x_\perp \qquad x_E \in E, \ x_\perp \perp E$

$x - x_E = x_\perp$

$x - x_E \in E^{\perp\perp}$ and so $x_\perp \in E^\perp$

thus $x_\perp \perp x - x_E = x_\perp$

thus $\langle x_\perp , x_\perp \rangle = 0$ and $x_\perp = 0$

so $x = x_E \in E$ $\blacksquare$

3. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Δείξτε ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \mathrm{dist}(x, K)^2$$

όπου $K = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απάν Πρώτα-Πρώτα: Bessel $\Rightarrow$

$$\forall n \quad \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2$$

οπότε η σειρά μη-αρνητικών όρων

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 \text{ συγκλίνει σε } \le \|x\|^2$$

Τώρα αν $d = \mathrm{dist}(x, K) = \inf\{\|x - z\| : z \in K\}$

οπότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists z_\varepsilon \in K$ ώστε

$$d \le \|x - z_\varepsilon\| < d + \varepsilon$$

$\exists n \in \mathbb{N} \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε $z_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

$$d \le \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\Big\| < d + \varepsilon$$

Όμως από το βασικό Λήμμα:

$$\Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k\Big\|^2 \le \Big\|x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\Big\|^2 < (d+\varepsilon)^2$$

$\|$ (ίδιο Λήμμα (Πυθ))

$$d^2 \le \underbrace{\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2}_{\text{μικραίνει}} < (d+\varepsilon)^2$$

$m > n$

$\forall m \ge n$

$$d^2 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k\rangle|^2 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 < (d+\varepsilon)^2$$

Στέλνοντας $m \to \infty$

$$d^2 \le \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2 < (d+\epsilon)^2$$

κι επειδή το $\epsilon > 0$ τυχαίο

έχω ισότητα.

<u>Παρατ.</u> Δεν είναι ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k\rangle e_k$$

συγκλίνει στον H

(μπορεί να είναι ένα

άλλο(ν))

4. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H.

(α) Αν $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

(β) Αν η $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική *βάση* του H, δείξτε ότι κάθε $y \in H$ ανήκει στην κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου

$$\{y_n : \langle y, y_n \rangle \neq 0\}\,.$$

Απόδ. Αρκεί να δ.ο., ν.δ.ο. η σειρά συγκλίνει στο H

$\forall n$, θέτω $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k$

$n > m$ $\quad \|y_n - y_m\|^2 = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} \langle x, x_k \rangle x_k \right\|^2$

$\overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2$

Επειδή έχω $\sum |\langle x, x_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

η ακολουθία $\left(\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \right)$ φραγμένη είναι βασική στο $\mathbb{R}$

άρα η (y_n) είναι βασική στο H

γιατί $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0$

$\sum_{k=m+1}^{n} |\langle x, x_k \rangle|^2 < \varepsilon^2$

άρα $\|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon^2$

όπως (H: πλήρης) $\exists y \in H$ ώστε

$y_n \to y = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$

Επειδή $y_n \in M$: M κλειστός άρα $y = \lim y_n \in M$

Ελέγχω ότι $y - x \perp M$

Απόδ. $\forall i, \langle y - x, x_i \rangle =$

$$\langle y, x_i \rangle - \langle x, x_i \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k , x_i \right\rangle - \langle x, x_i \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle \underbrace{\langle x_k, x_i \rangle}_{\delta_{ki}} - \langle x, x_i \rangle$$

$$= \langle x, x_i \rangle - \langle x, x_i \rangle = 0$$

$y - x \perp \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

$y - x \perp \operatorname{span}\{x_n\} \Rightarrow y - x \perp M$

Επομένως, από μοναδικότητα της P_M

έπεται $P_M(x) = y$ $\blacksquare$

Αλλιώς

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_k \rangle|^2 \overset{\text{Λήμμα}}{=} \operatorname{dist}(x, M)^2$$

Πυθ αγ.

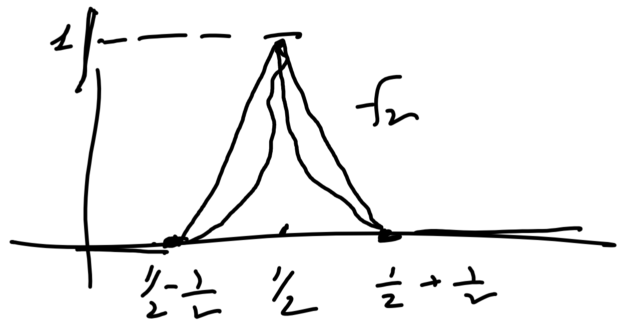
$\Downarrow$ ορισμό $P_M(x)$

$$y = P_M(x)$$

5. Εξετάστε αν η γραμμική απεικόνιση $\phi : f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής γραμμική μορφή στον $C([0,1])$.

Δεν είναι συνεχής αν $\|\cdot\|_2$

Παράδ.:



$$\varphi(f_n) = f_n(1/2) = 1 \quad \forall n$$

αν φ ήταν συνεχής θα ίσχυε

$$1 = |\varphi(f_n)| \leq \|\varphi\| \, \|f_n\|_2 \quad (*)$$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(t)|^2 dt = \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} |f_n(t)|^2 dt \leq \int_{1/2-1/n}^{1/2+1/n} 1 \, dt = \frac{2}{n}$$

$$\|f_n\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$(*) \qquad 1 \leq \|\varphi\| \sqrt{\frac{2}{n}}$$

άρα $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq \|\varphi\| \quad \forall n$ άτοπο

Παρατ.

$$\psi : (C[0,1], \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}, |\ |)$$
$$f \longmapsto f(\tfrac{1}{2})$$

μια χαρά συνεχής

αφού $|\psi(f)| = |f(\frac{1}{2})| \leq \|f\|_\infty$

6. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $f \in C([0,1])$ να ισχύει η ανισότητα

$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \leq C\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} .$$

Βρείτε την βέλτιστη (δηλ. την μικρότερη δυνατή) τιμή της C.

$$\left|\int_0^1 f(t)\,t\,dt\right|^2 \leq \underbrace{\int_0^1 t^2 dt}_{=\,1/3} \underbrace{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}_{\|f\|_2^2}$$

$$\Rightarrow \left|\int_0^1 t\, f(t)\,dt\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\|f\|_2$$

Βέλτιστο, γιατί αν επιλέξω για
$f(t)=t$
βγαίνει ισότητα

$$\int_0^1 t\,t\,dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\|f\|_2$$

διότι $\|f\|_2^2 = \int |f|^2 dt$
$= \int t^2 dt = \frac{1}{3}$

Κρύβεται από πίσω ότι

$$\varphi : (C([0,1]), \|\ \|_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$$

$$f \longmapsto \int_0^1 t\, f(t)\,dt$$

ένα γραμμ. τελεστή
με $\|\varphi\| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ■

7. Στον χώρο $M_n = M_n(\mathbb{C})$ των $n \times n$ πινάκων, ορίζουμε

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(B^*A),\quad A, B \in M_n$$

(εδώ $[b_{ij}]^* = [\bar{b}_{ji}]$). Δείξτε ότι είναι εσωτερικό γινόμενο. Γενικότερα, αν $\rho \in M_n$ και θέσουμε $\langle A, B\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(\rho B^* A),\ A, B \in M_n$, πότε είναι το $\langle\cdot,\cdot\rangle_\rho$ εσωτερικό γινόμενο στον M_n;

Το πρώτο μέρος ειδική περίπτωση του $2^{ου}$

$\rho = \mathbb{1}$

$\langle A, B\rangle_\rho = \mathrm{Tr}(\rho B^* A) = \mathrm{Tr}(A\rho B^*)$: πότε είναι εσωτ. γιν.

Πάντα πρέπει $\langle A, B\rangle_\rho$ είναι γραμμικό ως προς A και αντιγραμμικό ως προς B

αναγκαίο ερμιτιανό ότι $\langle B, A\rangle_\rho = \overline{\langle A, B\rangle_\rho}$

$$\mathrm{Tr}(B\rho A^*) = \overline{\mathrm{Tr}(A\rho B^*)}$$

$$= \mathrm{Tr}((A\rho B^*)^*)$$

$$= \mathrm{Tr}(B\rho^* A^*)$$

$$\iff \mathrm{Tr}(\rho A^* B) = \mathrm{Tr}(\rho^* A^* B) \quad \forall A, B$$

$$\iff \mathrm{Tr}((\rho - \rho^*)(\underline{A^* B})) = 0 \quad \forall A, B)$$

βάζω $B = I$, $A = \rho - \rho^*$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Tr}((\rho - \rho^*)(\rho - \rho^*)^*) = 0$$

άρα $\mathrm{Tr}(AA^*) = 0$

όμως $AA^* \geq 0$

οπότε αν $\mathrm{Tr}(AA^*) = 0$

τότε οι ιδιοτιμές του AA^* είναι (≥ 0) είναι ίσες $=0$

όπως $AA^* = 0$ άρα $A = 0$

άρα $\rho - \rho^* = 0$

άρα $\rho = \rho^*$

Μία αναγκαία συνθήκη $\rho = \rho^*$

* Γνωρίζω από "Γραμμική ΙΙ" ότι αν $\rho = \rho^*$ τότε $\exists$ μία ορθοκανονική βάση $\{x_k\}$ του $\ell^2[n]$ από ιδιοδιανύσματα του ρ με πραγματικές ιδιοτιμές

Ισοδύναμα $\exists\, U : \ell^2[n] \to \ell^2[n] : e_k \to x_k$ που διαγωνιοποιεί το ρ

άρα ο $\tilde{\rho} = U\rho U^{-1}$ είναι διαγώνιος

Παρατηρώ όμως ότι $Tr(XY) = Tr(YX)$

$$\langle A, B\rangle_\rho = Tr(\rho B^* A) = Tr(U^{-1}(U\rho B^* A))$$

$$= Tr(U\rho \underset{U^{-1}U}{\uparrow} B^* A U^{-1})$$

$$= Tr(U\rho U^{-1} U B^* U^{-1} U A U^{-1})$$

$$= Tr(\tilde{\rho}\, \tilde{B}^* \tilde{A}) = \langle \tilde{A}, \tilde{B}\rangle_{\tilde{\rho}}$$

Τώρα βάζω $\tilde{A} = \tilde{B} = E_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ i

$$\langle E_{ii}, E_{ii}\rangle_\rho = Tr(\underset{\text{διαγώνιος}}{\tilde{\rho}}\, E_{ii}) = \rho_{ii}\, Tr(E_{ii})$$

$E_{ii} \geq 0$, $\neq 0$ πρέπει $\rho_{ii}\, Tr(E_{ii}) > 0$

αναγκαία συνθήκη οι ιδιοτιμές ρ_i του $\tilde{\rho}$ να είναι > 0

τα ρ_i είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές του ρ

$$\tilde{\rho} = U \rho U^{-1}$$

Βρήκαμε δύο αναγκαίες συνθήκες:

$\rho = \rho^*$ με γνήσια θετικές ιδιοτιμές

Αυτές οι συνθήκες είναι και ικανές διότι αν έχει ρ διαγώνιο με >0 στη διαγώνιο τότε εύκολα φαίνεται ότι $\langle A, B \rangle_\rho$ είναι εσωτ. γινόμενο

- Χρησιμοποιήσαμε τις εξής ιδιότητες του ίχνους!

(i) Είναι γραμμικό

(ii) $Tr(X^*) = \overline{Tr(X)}$

(iii) $Tr(X^*X) \geq 0$ και $= 0$ ανν $X = 0$

(iv) $Tr(XY) = Tr(YX)$

$\Longrightarrow Tr(UXU^{-1}) = Tr(X)$ $\forall X, Y, U$

Στο γραμμ. χώρο $M_n(\mathbb{K})$ κάθε εσωτ. γινόμενο είναι της μορφής

$\langle A, B \rangle_\rho = Tr(A \rho B^*)$ για κάποιο $\rho \geq 0$ με θετικές ιδιοτιμές

"Κλασική" περίπτωση:

Στο γραμμ. χώρο $\mathbb{K}^n$

όλα τα εσωτ. γινόμενα είναι της μορφής

$$\langle a,b\rangle_\rho = \sum_{k=1}^{n} \rho(k)\, a(k)\,\overline{b(k)}$$

όπου $\rho = (\rho(k))_{k=1}^{n}$

$\rho(k) \in \mathbb{R}$ και $\rho(k) > 0$ $\forall k$

Quantum Information Theory

8. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to \mathbb{C} \to F : x \mapsto \langle x, u \rangle \mapsto \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

- Δείξτε ότι ο συζυγής του vu^* είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$. ✓
- Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0? ✓
- Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^N s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}$, $u_k \in E, v_k \in F$.
- Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F. να το δούμε στο επόμενο μάθημα
- Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές? μη αν θα όλες $\leq \min(\dim E, \dim F)$

$$\langle \Theta_{uv}^*(\xi), \eta \rangle = \langle \xi, \Theta_{uv}(\eta) \rangle$$
$$= \langle \xi, \langle \eta, u \rangle v \rangle$$
$$= \langle \xi, v \rangle \overline{\langle \eta, u \rangle}$$
$$= \langle \xi, v \rangle \langle u, \eta \rangle$$
$$= \langle \langle \xi, v \rangle u, \eta \rangle$$
$$= \langle \Theta_{vu}(\xi), \eta \rangle \quad \forall \xi, \eta$$

$$\Theta_{uv}^* = \Theta_{vu}$$

$$(vu^*)(wz^*)(\xi) = vu^*(\langle \xi, z \rangle w)$$
$$= \langle \xi, z \rangle \langle w, u \rangle v$$
$$= \langle w, u \rangle (\langle \xi, z \rangle v)$$
$$= \langle w, u \rangle (vz^*)(\xi)$$

$$(vu^*) \circ (wz^*) = \langle w, u \rangle (vz^*)$$

Για $v, u, w, z \neq 0$ όχι $= 0$ ανν $\langle w, u \rangle = 0$

παίρνω μια ον βάση $\{u_1 \ldots u_N\}$ του E ώστε $\forall x \in E$ γράφεται $x = \sum_{k=1}^N \langle x, u_k \rangle u_k$

$N = \dim E$

$$Tx = \sum_{k=1}^{N} \langle x, u_k \rangle T u_k$$

τώρα πάρε ΟΚ βάση $\{v_1 \dots v_M\}$ του F

γράψε $$Tu_k = \sum_{i=1}^{M} \langle Tu_k, v_i \rangle v_i$$

$M = \dim F$

άρα $$Tx = \sum_{i,k} \langle x, u_k \rangle \langle Tu_k, v_i \rangle v_i$$

$$= \sum_{i,k} \langle Tu_k, v_i \rangle (v_i u_k^*)(x)$$

$$T = \sum_{i,k} \lambda_{ik} v_i u_k^*$$

$N \times M$ το πλήθος όρων

και οι δύο βάσεις είναι ΟΚ

<u>Ερώτηση</u> μπορώ να μειώσω το πλήθος των όρων να είναι $\leq$ από το $\max(N, M)$

9. Αν $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής, ορίζουμε $\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\frac{dt}{2\pi}$.

Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\mathcal{F}_0 : (C([-\pi,\pi]), \|\cdot\|_2) \to (\ell^2(\mathbb{Z}), \|\cdot\|_2) : f \mapsto (\hat{f}(n))_n$$

επεκτείνεται σε (γραμμική) ισομετρία από τον $L^2([-\pi,\pi])$ επί του $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Πρώτα έχουμε δείξει ότι τα

$f_n(t) = e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$

ένα ορθοκανονικό $\subset \ell^2(\mathbb{Z})$

και επειδή $F_0 : f_n \to e_n$

επί σε ορθοκανονική

$\Rightarrow F_0$ ισομετρία

άρα επεκτείνεται σε ισομετρία $F : L^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$

Είναι επί το $\ell^2(\mathbb{Z})$?

Δηλ. αν πάρω μια $(a(n)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$

δηλ. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a(n)|^2 < +\infty$

Μπορώ να βρω $f \in L^2([-\pi,\pi])$ τ.ω.

$\hat{f}(n) = a(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$?

$\forall N \in \mathbb{N}$ ορίζω

$$f_N = \sum_{|k| \le N} a(k) f_k$$

$$f_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a(k) e^{ikt}$$

τριγ. πολυώνυμο

$N > M$ $\quad \|f_N - f_M\|_2^2 = \sum_{M+1 \le |k| \le N} |a(k)|^2$

αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 < +\infty$

έπεται ότι η (f_N) είναι βασική

Επειδή ο $L^2([-\pi,\pi])$ είναι πλήρης

$\Longrightarrow \exists\, f \in L^2([-\pi,\pi])$ ώστε

$$f = \|\ \|_{L^2} - \lim f_N$$

δηλ. $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a(k) f_k$ (σύγκλιση ως προς την $\|\ \|_2$)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big| f(t) - \sum_{|k| \le N} a(k) e^{ikt} \Big|^2 dm(t) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Δεν ισχυρίζομαι ότι

$$\sum_{|k| \le N} a(k) e^{ikt} \longrightarrow f$$

κατά σημείο (ΔΕΝ ισχύει)

ούτε κατά σχεδόν παντού (" ")

Είναι γνωστό ότι η σειρά συγκλίνει στην f σχεδόν παντού (Θεώρημα Carleson)

$$\sup_t \Big| f(t) - \sum_{|n|\le N} a(n)\, e^{int} \Big| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

οι συναρτήσεις με αυτή την ιδιότητα είναι αναγκαστικά συνεχείς να είναι πολύ λίγες (το συμπλήρωμά τους είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του $C([-\pi,\pi])$)

Αλλιώς λέγοντας ότι $\exists f \in C([-\pi,\pi])$ που η σειρά Fourier της δεν συγκλίνει ~~[illegible]~~ ούτε σε κάθε σημείο

Ξέρουμε επίσης ότι οι μέσοι όροι της $S(f)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην f όταν η f είναι συνεχής (Θεώρημα Fejér)

Αυτό θα έχει συνέπεια $\| \|_2^2$ ομοιόμορφα (δηλ. κατά $\square$ κάθε σημείο)