Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \operatorname{im} T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\operatorname{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \operatorname{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $v \in K$ και $u \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \to K$$

από τον τύπο $\quad vu^*(x) = \langle x, u \rangle v \quad (x \in H).$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$vu^* = \Theta_{u,v} = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Ο τελεστής vu^* είναι φραγμένος, και $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$.
Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ πρώτης τάξης ($\mathrm{rank}(T) = 1$) είναι αυτής της μορφής (με u, v μη μηδενικά).

Κάθε $A \in \mathcal{F}(H, K)$ γράφεται $A = \sum_{k=1}^{n} s_k f_k e_k^*$ όπου $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^\perp = (\ker A^* A)^\perp$ ώστε $(A^* A) e_k = s_k^2 e_k$ και $\{f_k := \frac{Ae_k}{s_k}\}$ ορθοκανονική βάση του $\operatorname{im} A$.
Ισχύει $A^* = \sum_{k=1}^{n} s_k e_k f_k^*$. $\quad \mathrm{rank}(A^*) = \mathrm{rank}(A) < +\infty$

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Κάθε $T \in \mathcal{F}(H,K)$ «ζει» μεταξύ χώρων πεπερασμένης διάστασης (των $(\ker T)^\perp = \operatorname{im} T^*$ και $T(E) = \operatorname{im} T$):
Ως προς τις διασπάσεις $H = (\ker T)^\perp \oplus \ker T$ και $K = \operatorname{im} T \oplus (\operatorname{im} T)^\perp$ ο T γράφεται

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$T_{11} \in \mathcal{B}((\ker T)^\perp, \operatorname{Im} T)$
πεπερ. διάστασης χώροι

Τοπολογική ιδιότητα: Αν $A \in \mathcal{F}(H,K)$, τότε το $A(B_H)$ είναι (σχετικά) συμπαγές στον K.

$\overline{A(\text{ball } H)}$ συμπαγές στο K

$\underbrace{A(\text{ball } H)}_{\text{φραγμ.} \subseteq \text{ χώρου πεπερ. διάστασης}} \subseteq A(H) \subseteq K$
πεπερασμένης διάστασης ($= \operatorname{rank} A$)

άρα $\overline{A(\text{ball } H)}$ συμπαγές!

παράδ. $H = K = \ell^2$
$A =$ προβολή στο $\overline{\operatorname{span}}\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$

$A(e_k) = 0$, $k = 2n+1$
$A(e_k) = e_k$, $k = 2n$

Είναι φραγμ., αλλά $\overline{A(\text{ball } H)}$ όχι συμπαγές
γιατί περιέχει $\{e_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ άρα

$n \neq m \quad \|e_{2n} - e_{2m}\|^2 = \|e_{2n}\|^2 + \|e_{2m}\|^2 = \underline{2}$

$\|e_{2n} - e_{2m}\| = \sqrt{2}$

οπότε η ακολουθία (x_n) με $x_n = e_{2n}$

$\in A(\text{ball } H)$

δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E, F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E, F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος, γιατί αν το σύνολο $\overline{T(\hat{B}_E)}$ είναι συμπαγές, είναι βέβαια φραγμένο.
Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

$T(\hat{B}_E)$ σε φραγμένο, άρα $T \in \mathcal{B}(E,F)$

$\mathcal{F}(E,F) \subseteq \mathcal{K}(E,F)$

Παράδειγμα

Αν $a = (a_n) \in c_0$, ο τελεστής $D_a = \text{diag}(a_n) \in \mathcal{B}(\ell^2)$ είναι συμπαγής.

$\lim_n a_n = 0$

$$D_a = \begin{bmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_n & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

είναι συμπαγής

$D_a(e_n) = a_n e_n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |a_n| < \varepsilon$

$$D_a = \begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ \ddots \ a_{n_0} & 0 \\ 0 & a_{n_0+1} \ \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}$$

$D_0 e_k = a_k e_k, \; k = 1 \dots n_0$

$0, \; k > n_0$

$D_c = D_0 + D_1$

D_0 πεπερ. τάξης ($\text{rank}\, D_0 \le n_0$)

D_1: μικρή νόρμα

$D_1(e_k) = \begin{cases} 0, & k = 1 \dots n_0 \\ a_k e_k, & k > n_0 \end{cases}$

$D_1 x = D_1\left(\sum_{k=1}^{\omega} x(k) e_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{\omega} x(k) D_1 e_k$

$= \sum_{k > n_0} x(k) a_k e_k$

$\forall x \in \ell^2 = H$

$\|D_1 x\|^2 = \left\| \sum_{k > n_0} x(k) a_k e_k \right\|^2$

$= \sum_{k > n_0} |x(k) a_k|^2$

$\le \epsilon^2 \sum_{k > n_0} |x(k)|^2 \le \epsilon^2 \|x\|^2$

άρα $\|D_1\| < \epsilon$

$D_a = (\text{πεπερ. τάξη}) + (\text{νόρμα} < \epsilon)$

$\| D_a - D_0 \| = \|D_1\| < \epsilon$

νδο $\overline{D_a(\text{ball}\, H)}$ συμπαγές $\subseteq H$

Απόδ. $\forall x \in \text{ball}\, H$ έχω $\|D_a x - D_0 x\| < \epsilon$

όμως $D_0 x \in \text{span}\{e_k : k \le n_0\}$: πεπερ. διάστασης

$D_0(\text{ball}\, H) \subseteq$ φραγμένο υποσύνολο χώρου πεπερ. διάστασης

$\overline{D_0(\text{ball}\, H)}$ συμπαγές

άρα το $\overline{D_0(\text{ball}\, H)}$ είναι ολικά φραγμένο:

$\exists y_1, y_2 \dots y_m \in \text{ball}(H)$ ώστε (*)

$\overline{D_0(\text{ball}\, H)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \epsilon)$

$\overline{D_c(\text{ball}\, H)} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, 2\epsilon)$

Ισχ

άρα το σύνολο είναι συμπαγές $\Longrightarrow D_c$ συμπαγής [illegible] $\forall x \in ball(H)$ [illegible] (*)

$$D_0 x \in \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, \epsilon)$$

[illegible] $\exists\, k \in [m] : \|D_0 x - y_k\| < \epsilon$

[illegible] $\|D_\alpha x - D_0 x\| < \epsilon$

[illegible] $\|D_\alpha x - y_k\| \le \|D_\alpha x - D_0 x\| + \|D_0 x - y_k\| < 2\epsilon$

$$D_\alpha x \in \bigcup_{k=1}^{m} B(y_k, 2\epsilon)$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση. Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή (είναι γραμμ. χώρος, αλλά) δεν είναι πάντα κλειστό
(πρδγ: Άσκηση!)

Το σύνολο τιμών ενός φραγμένου τελεστή πεπερασμένης τάξης είναι κλειστό (γιατί;).

Παρατήρηση.

$$\mathcal{F}(E,F) \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{K}(E,F) \underset{\neq}{\subseteq} \mathcal{B}(E,F).$$

αν οι E και F είναι απειροδιάστατοι, δεν ισχύουν οι ισότητες.

Παραδείγματα Ο ταυτοτικός τελεστής ή η προβολή σε έναν χώρο άπειρης διάστασης δεν είναι συμπαγής.

Ο $D_a \in \mathcal{B}(\ell^2)$ όπου $a_n = \frac{1}{n}$ είναι συμπαγής αλλά έχει άπειρη τάξη.

γιατί, αφού $a_n \neq 0$ $\qquad$ $D_a(e_n) = \frac{1}{n} e_n$

$\forall e_n \in \mathrm{Im}(D_a)$ $\qquad$ $e_n = D_a(n e_n)$

άρα, το $\mathrm{Im}(D_a) \supseteq \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{Im}(D_a)} = \ell^2$

αλλά δεν ισχύει $\mathrm{Im}\, D_a = \ell^2$

διότι ο D_a δεν είναι επί

γιατί $\forall y \in \mathrm{Im}(D_a)$ είναι της μορφής $y = D_a x$ για κάποιο $x \in \ell^2$

$y = \sum y(k) e_k = \sum a_k x(k) e_k$ με $\sum |x(k)|^2 < +\infty$

$y(k) = a_k x(k) = \frac{1}{k} x(k)$ όπου

είναι $\underline{Dx}$ α λόγο γιατί $y = \left(\frac{1}{k}\right)$

θα είχε $\frac{1}{k} = \frac{1}{k} x(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

άρα $x(k) = 1$ $\forall k$

<u>άτοπο</u> $\sum |x(k)|^2 < +\infty$

<u>άρα</u> το $y = \left(\frac{1}{k}\right) \in \ell^2$

$y \notin \mathrm{Im}(D_a)$