Αναλλοίωτοι υπόχωροι

Ένας υπόχωρος $E \subseteq H$ είναι αναλλοίωτος (invariant) από έναν φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ αν $A(E) \subseteq E$, δηλ. αν $Ax \in E$ για κάθε $x \in E$. Τότε ο *κλειστός* υπόχωρος $\overline{E}$ είναι και αυτός A-αναλλοίωτος.
Όταν και ο E και ο $E^\perp$ είναι A-αναλλοίωτοι, θα λέμε ότι ο υπόχωρος E ανάγει (reduces) τον A.
Γράφοντας $H = \overline{E} \oplus E^\perp$, ο A γράφεται

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

$\forall x \in E \quad Ax \in E \qquad P = P(E)$

$\iff x = Px$ δηλ. $P^\perp(Ax) = 0$

$P^\perp A P = 0$

δηλ. $A_{21} = 0$

και αντίστροφα

αν $A_{21} = P^\perp A P|_{\overline{E}}$

αν $= 0$ τότε $P^\perp A P = 0$

άρα $\forall x \in \overline{E}$

$Ax = APx \in \overline{E}$

δηλ. $P^\perp(Ax) = 0$

$A(\overline{E}) \subseteq \overline{E}$

$\Updownarrow$

$A \simeq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

Έπεται ότι $A(E) \subseteq E$ αν και μόνον αν $A_{21} = 0$, και ότι ο A ανάγεται από τον E αν και μόνον αν $A_{12} = A_{21} = 0$.

αν $\overline{E}$ ανάγει τον A

$A \sim \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$

Λήμμα

Ένας κλειστός υπόχωρος E είναι A-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $AP = PAP$ (όπου $P = P_E$). Ο E ανάγει τον A αν και μόνον αν $A(E) \subseteq E$ και $A^*(E) \subseteq E$, ισοδύναμα αν και μόνον αν $AP = PA$.

Δες και το αρχείο invtn.pdf στην η-τάξη.

$A(E) \subseteq E \iff A_{21} = 0 \iff \underbrace{P^\perp}_{(I-P)} AP = 0 \iff AP = PAP$

E ανάγει τον A $\iff A_{21} = 0$ και $A_{12} = 0$ $\implies AP = PAP = PA$ δηλ. $AP = PA$

$\iff AP = PAP$ $\qquad PAP^\perp = 0 \Updownarrow PA = PAP$

$\Longleftarrow$ $AP = PAP$ και $PAP = PA$

$\iff AP = PA$.

$PA = PAP \iff A^* P = P A^* P$ ✓ $A^*(E) \subseteq E$

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι;

Παρατήρηση Αν $x \in H$, ο υπόχωρος $E_x = \overline{\text{span}\{x, Ax, A^2x, \dots\}}$ είναι A-αναλλοίωτος, διαχωρίσιμος. Αν λοιπόν ο χώρος H *δεν* είναι διαχωρίσιμος και $x \neq 0$, ο E_x είναι μη τετριμμένος (δηλ. $\neq \{0\}, \neq H$). Επίσης, κάθε ιδιόχωρος του A είναι A-αναλλοίωτος. Αν ο H είναι *μιγαδικός* χώρος πεπερασμένης διάστασης, κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές. Άρα, και στις δυο αυτές περιπτώσεις, κάθε φραγμένος τελεστής έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο.
Μένει η περίπτωση απειροδιάστατου αλλά διαχωρίσιμου χώρου.

σε μη διαχ χώρους ΝΑΙ

σε μιγ χώρου πεπερ διαστ, ΝΑΙ

Το πρόβλημα του αναλλοίωτου υπόχωρου:

Είναι αλήθεια ότι κάθε φραγμένος τελεστής A σε έναν (διαχωρίσιμο, απειροδιάστατο, μιγαδικό) χώρο Hilbert H (ισοδύναμα, στον ℓ^2) έχει μη τετριμμένο αναλλοίωτο υπόχωρο;

υπαρξη

Υπάρχουν αναλλοίωτοι υπόχωροι

Απάντηση: Άγνωστο, ακόμα και για *αυτοπαθείς χώρους* Banach. Για γενικούς χώρους Banach, όχι πάντα.

• Το πρώτο παράδειγμα τελεστή χωρίς αναλλοίωτο υπόχωρο (∼1975): P. Enflo, On the invariant subspace problem in Banach spaces, *Acta Math.*, 158, 1987.

• Στον ℓ_1: C.J. Read, A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1, *Bull. London Math. Soc.* 17, 1985.

• Ένας χώρος όπου κάθε τελεστής έχει αναλλοίωτο υπόχωρο: S.A. Argyros and R.G. Haydon, A hereditarily indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Mathematica* 206, No. 1 (2011).

• Μια σύγχρονη παρουσίαση: I. Chalendar and J. R. Partington, *Modern approaches to the invariant subspace problem*, Cambridge University Press, 2011.

• Και ένα σχετικό video: Eva Gallardo Gutiérrez: The invariant subspace problem: a concrete operator theory approach.