Προβολές

8 Απριλίου 2022

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \le I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \le 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

Απόδ. $(i) \Rightarrow (ii)$ $\quad \sum_{n=1}^{m} P_n \le I \quad (\ge 0) \Rightarrow$

$$\forall x, \quad \langle \underbrace{\left(\sum P_n\right)}_{a_m} x, x \rangle \le \langle x, x \rangle$$

$a_m = a_m^*$ $\qquad \|a_m\| = \sup\{ |\langle a_m x, x\rangle| : \|x\| \le 1 \}$

$$\le \sup\{ \underbrace{|\langle x, x\rangle|}_{\le 1} : \|x\| \le 1$$

συνεπώς, η $\|a_m\| \le 1$ και (αφού $a_m = a_m^*$)

$-I \le Q_m \le I$ ולכן $Q_m \le 1$

יהא $\underline{\underline{x \in H}}$ ויהי $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $y = P_k x$ ואז

$$\|y\|^2 = \|P_k y\|^2 \le \sum_{n=1}^{m} \|P_n y\|^2 = \sum_{n} \langle P_n y, P_n y \rangle$$

$$= \sum_{n} \langle P_n^2 y, y \rangle = \sum_{n}^{m} \langle P_n y, y \rangle$$

$$\overset{(*)}{=} \langle (\sum^{x} P_n) y, y \rangle \le \langle y, y \rangle$$

לכן יש! $\|y\|^2 = \|P_k y\|^2 = \sum_{n=1}^{m} \|P_n y\|^2$

לכן $\forall n \ne k$ מתקיים $\|P_n y\| = 0$ ולכן $P_n P_k x = 0$

לכן $\underbrace{P_n P_k}_{} = 0$ ולכן $\underbrace{P_n \perp P_k}_{}$

וגם $\forall x, y$ $\langle P_n x, P_k y \rangle = \langle x, P_n P_k y \rangle = 0$

$$\Downarrow$$

$$P_n P_k = 0$$

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

(iii) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.*

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

νδο Q_m προβολή, δηλ. $Q_m = Q_m^* = Q_m^2$

$\uparrow$ αυτ., άθροισμα αυτοσυζ.

νδο $Q_m = Q_m^2$ με επαγωγή στο m

Για $m=1$: $Q_1 = P_1 = P_1^2$

Επαγωγικό βήμα: αν $Q_{m-1}^2 = Q_{m-1}$

Πράγματι $P_n \perp \{P_1 \dots P_{n-1}\} \Rightarrow P_n \perp \sum_{k=1}^{n-1} P_k = Q_{n-1}$

οπότε
$$Q_n^2 = (Q_{n-1} + P_n)^2$$
$$= Q_{n-1}^2 + Q_{n-1}P_n + P_n Q_{n-1} + P_n^2$$
$$= Q_{n-1} + 0 + 0 + P_n$$
$$= Q_n$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Υποθέτω ότι η $Q_m = \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή

$k < n$
$$Q_n = Q_{n-1} + P_n \geq Q_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} P_k \geq P_k$$
$$Q_n P_k = P_k \quad , \quad Q_{n-1} P_k = P_k$$

οπότε
$$P_k = Q_n P_k = (Q_{n-1} + P_n) P_k = \underbrace{Q_{n-1} P_k}_{P_k} + P_n P_k$$
$$P_k = P_k + P_n P_k \Rightarrow P_n P_k = 0$$

άρα $P_n \perp P_k$

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \le I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \le 1$.*

(ii) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

(iii) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.*

(iv) $\sum_n \|P_n x\|^2 \le \|x\|^2$ *για κάθε $x \in H$.*

$(iii) \Rightarrow (iv)$: $\forall x \in H$ $\{P_n x\}$ $\perp$ ανά δύο $\forall m$

άρα (Πυθ) $\sum_{n=1}^{m} \|P_n x\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{m} P_n x \right\|^2$ $(\|Q_m\| \le 1)$

$= \|Q_m x\|^2 \le \|x\|^2$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \le \|x\|^2$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Αν $\forall x \in H$ $\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \leq \|x\|^2$

Τότε $\forall m$,

$$\left\langle \left(\sum_{k=1}^{m} P_k\right) x, x \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle P_k x, x \rangle = \sum_{k=1}^{m} \|P_k x\|^2 \overset{\text{υπ.}}{\leq} \|x\|^2$$

$$\langle P_k x, x\rangle = \langle P_k^2 x, x \rangle = \langle P_k x, P_k x \rangle$$

Άρα: $\left\langle \left(\sum_{k=1}^{m} P_k\right) x, x \right\rangle \leq \langle I x, x \rangle \quad \forall x$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I \quad (\forall m$$

Προβολές

Εναλλακτική προσέγγιση:

Πρόταση

Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(*i*) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.*

(*ii*) *Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.*

(*iii*) *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, η $Q_m := \sum_{n=1}^{m} P_n$ είναι προβολή.*

(*iv*) *$\sum_n \|P_n x\|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε $x \in H$.*

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

Απόδειξη στο αρχείο orthproj.pdf.

And

Αν ισχύουν οι συνθήκες

$\forall x \in H$ θέτω $x_n = Q_n x = \left(\sum_{k=1}^{n} P_k x\right)$

από (iv) $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$! $\forall n > m \geq n_0$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \|P_k x\|^2 < \epsilon^2$$

άρα:

$$\|x_n - x_m\|^2 = \left\|\sum^{n} P_k x - \sum^{m} P_k x\right\|^2$$

$$= \left\|\sum_{k=m+1}^{n} P_k x\right\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} \|P_k x\|^2 < \epsilon^2$$

άρα η (x_n) είναι βασική στο H: Hilbert

υπάρχει $\exists \lim_n x_n = y$

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$$

Αν θέσω $M_n = im(P_n)$: ανα δύο $\perp$ κλειστοί υπόχωροι

ισχυρίζομαι $M = \overline{\text{Span}}\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$

νδο $y = \sum P_k x = P(M)x$

Άρα: $\forall n$ το $\underline{Q_n x = x_n} \in \operatorname{im}(Q_n)$

$$\operatorname{im}\Big(\sum_{k=1}^{n} P_k\Big)$$

$\perp$ ανά δύο

$$= \operatorname{span}\{\operatorname{im}(P_k) : k = 1, \dots, n\}$$

$$= \operatorname{span}\{M_k : k \le n\} \subseteq \underline{M}$$

$\forall n,\ x_n \in M$

$\Rightarrow y = \lim x_n \in M$ } $\Rightarrow y - P(M)x \in M$

όμως $P(M)x \in M$

Άρα αρκεί, (ν.δ.ο. $y - P(M)x \perp M$)

$Q_n P_k = P_k = P_k Q_n$

Για $n \ge k$ $Q_n \ge P_k$

άρα $\underline{P_k x_n} = P_k(Q_n x) = \underline{P_k x}$

$P_u y = \lim P_u x_n = P_u x = P_u P(M) x$

dia $P_u \le P(M)$

$P_u (y - P(M)x) = 0$

deci $y - P(M)x \perp M_u \quad \forall u$

$y - P(M)x \perp \overline{\operatorname{span}\{M_u : u \in M\}} = M$

$y - P(M)x \in M \Rightarrow y - P(M)x = 0$

ca $y - P(M)x \perp M$ deci $y = P(M)x$

$P(M)x = \sum_{u} P_u x$

H : Hilbert, M = κλειστός υπόχωρος

$$H = M + M^{\perp}$$

και $M \perp M^{\perp}$ (ειδικότερα $M \cap M^{\perp} = \{0\}$)

λέμε $H = M \oplus M^{\perp}$ εσωτερικό ευθύ άθροισμα των $M, M^{\perp}$

$\forall\, x \in H$ γράφεται μοναδικά

$$x = Px + P^{\perp}x \quad \text{με } P = P(M)$$

$$P^{\perp} = P(M^{\perp}) = I - P$$

και $$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|P^{\perp}x\|^2$$

Αν θεωρήσω $H_1 = M$, $H_2 = M^{\perp}$ χώροι Hilbert

εξωτερικό ευθύ άθροισμα $H' = H_1 \oplus H_2$

Είναι το $H' = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : \begin{matrix} x \in H_1 \\ y \in H_2 \end{matrix} \right\}$

Μπορείς να συνεχίσεις και

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \right\rangle_{H'} := \langle x, x' \rangle_1 + \langle y, y' \rangle_2$$

H' : γίνεται χώρος Hilbert

$$H' = H_1 \oplus H_2$$

<u>Παρατ.</u> H αντίστοιχα

$$H \longrightarrow H'$$

$$x = Px + P^{\perp}x \longmapsto \begin{bmatrix} Px \\ P^{\perp}x \end{bmatrix} \in H_1 \oplus H_2$$

είναι 1-1 επί και γραμμική

και ισομετρική!

$$\|x\|_H^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \|Px\|^2 + \|P^{\perp}x\|^2 = \|Px\|_{H_1}^2 + \|P^{\perp}x\|_{H_2}^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} Px \\ P^{\perp}x \end{bmatrix} \right\|_{H'}^2$$

Σ 2-D $H = M \oplus M^\perp$

Enc $A \in B(H)$

$\forall x \in H$, $\quad x = Px + P^\perp x$

$$Ax = APx + AP^\perp x$$

or $\quad Ax = P(Ax) + P^\perp(Ax)$

$$= PAPx + PAP^\perp x + P^\perp APx + P^\perp AP^\perp x$$

$$A = PAP + PAP^\perp + P^\perp AP + P^\perp AP^\perp$$

$PA|_M : M \to M$ $\qquad$ $PA|_{M^\perp} : M^\perp \to M$

$A_{11} := PAP|_M : M \to M$ $\qquad$ $A_{12} = PAP^\perp|_{M^\perp} : M^\perp \to M$

$A_{21} := P^\perp AP|_M : M \to M^\perp$ $\qquad$ $A_{22} := P^\perp AP^\perp|_{M^\perp} : M^\perp \to M^\perp$

Σχηματικά ως προς τη διάσπαση

$$H = M \oplus M^\perp$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$ δηλαδή!

$$A \begin{bmatrix} Px \\ P^\perp x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} Px + A_{12} P^\perp x \\ A_{21} P^\perp x + A_{21} P^\perp x \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$A_{11} \in B(M, M)$

$A_{12} \in B(M^\perp, M)$

$A_{21} \in B(M, M^\perp)$

$A_{21} \in B(M^\perp, M^\perp)$

αντιστοιχεί στον ανάστροφο πίνακα

$$A^* \sim \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{bmatrix}$$

$$B \sim \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad \text{as repres } M \oplus M^t$$

then $$AB \sim \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21}} \overset{\| \; B_{21} A_{12}}{} & \times \\ \cdot \quad \cdot \quad \times & \times \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{A_{12} B_{21}}_{\in \mathcal{G}(M)} : M \xrightarrow{B_{21}} M^t \xrightarrow{A_{12}} M$$