Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Θεώρημα

Αν H είναι χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Ο T είναι συμπαγής.
(ii) Για κάθε ορθοκανονική ακολουθία $\{x_n\}$ του H, ισχύει $\langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$.
(iii) Υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Πόρισμα (Άσκηση)

Έστω H, K χώροι Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{F}(H, K)$ και $C \in \mathcal{B}(H, K)$ ώστε $\|C\| < \epsilon$ και $A = B + C$. Λέμε ότι «ο A είναι μικρή διαταραχή ενός τελεστή πεπερασμένης τάξης».

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach
(Per Enflo, Acta Math., **130** (1973).

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Ο P. Enflo παραλαμβάνει το βραβείο από τον S. Mazur.

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Πρόταση

Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \to K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\operatorname{im} A}$ και $(\ker A)^{\perp}$ είναι διαχωρίσιμοι.

Απόδ. $A \in \mathcal{K}(H,K)$ νδο $\overline{\operatorname{im} A}$ διαχωρίσιμος

Δείχνω (αρκεί) ότι $\operatorname{im} A$ διαχ

A συμπ: $A(\text{ball } H)$ έχει συμπ $\subseteq K$

άρα F : ολικά φραγμ.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ πεπερ σύνολο $Y_n \subseteq F$ ώστε $F \subseteq \bigcup_{y \in Y_n} B(y, \frac{1}{n})$ (*)

$Y = \{ kY_n : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \}$ αριθμήσιμο $\subseteq F$

Ισχ. $\overline{Y} \supseteq \operatorname{im} A$ (άρα $\operatorname{im} A$ διαχ)

νδο $\forall x \in H$ ώστε $Ax \in \overline{Y}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Πάρε $m \in \mathbb{N}$ $m \geq \|x\|$ ώστε $\frac{x}{m} \in \text{ball } H$

$A(\frac{x}{m}) \in A(\text{ball } H) = F \subseteq$

όπου επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{m}{n} < \varepsilon$

Από (*) : $\exists\, y \in Y_n$: $\|A(\frac{x}{m}) - y\| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \|Ax - my\| < \frac{m}{n} < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, my \in Y$: $\|Ax - my\| < \varepsilon$

άρα $Ax \in \overline{Y}$ ∎

<u>νδο</u> $(\ker A)^{\perp}$ κλειστό : Θυμίζω $\ker A = \ker A^*A$

$A \in \mathcal{K}(H, K) \Rightarrow A^*A \in \mathcal{K}(H)$

οπότε από το (i) $\underbrace{\overline{\operatorname{im} A^*A}}$ = κλειστό

$\quad \| $

$(\ker(A^*A))^{\perp}$ κλειστό

$\quad \| $

$(\ker A)^{\perp}$

Χαρακτηρισμοί Συμπαγών Τελεστών

Πρόταση

Έστω H, K χώροι Hilbert. Αν η γραμμική απεικόνιση $A : H \to K$ είναι συμπαγής, τότε οι υπόχωροι $\overline{\operatorname{im} A}$ και $(\ker A)^{\perp}$ είναι διαχωρίσιμοι.

Πρόταση

Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν για κάθε ορθοκανονική ακολουθία (x_n) του H, η ακολουθία (Tx_n) συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_K$.

Απόδ. Αν T συμπαγής τότε $T^*T \in \mathcal{K}(H)$ οπότε από το θεώρημα

$$\langle (T^*T)x_n, x_n \rangle \longrightarrow 0$$

$$\langle Tx_n, Tx_n \rangle = \|Tx_n\|^2 \quad \text{άρα } \|Tx_n\| \longrightarrow 0$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $\forall (x_n)$ ο.κ. ακολουθία του H, υπάρχει

το $\lim_n Tx_n = y \in K$

Ισχ. $y = 0$ Απόδ. $\forall z \in K$ $\langle y, z \rangle = \lim_n \langle Tx_n, z \rangle = \lim_n \langle x_n, T^*z \rangle$ (+)

$\{x_n\}$ ο.κ.: Bessel: $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle T^*z, x_n \rangle|^2 \leq \|T^*z\|^2$

άρα $(\langle T^* z, x_n\rangle \to 0 \Rightarrow \langle x_n, T^* z\rangle \to 0$

$$\langle y, z\rangle = \lim \langle x_n, T^* z\rangle = 0 \quad \forall z \in K$$

$$\Downarrow$$

$$y \equiv 0$$

άρα δείξαμε ότι $\forall (x_n)$ ON ακολουθία $\|Tx_n\|_K \to 0$,

άρα $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \le \|Tx_n\| \|x_n\| \to 0$

(με την υπόθεση $H = K$)

Για τη γενική περίπτωση, $H \neq K$, αργότερα

Ιδέα: Για να δείξω ότι $y = 0$ αρκεί νδο $\langle y, z\rangle = 0 \ \forall z \in K$

(y_n) ! για να δείξω ότι $y_n \to 0$ αρκεί νδο $\langle y_n, z\rangle \to 0 \ \forall z \in K$;;;

<u>ΟΧΙ</u> <u>πχ</u> (y_n) ON ακολουθία και $\|y_n\| = 1 \not\to 0$

αλλά $\forall z$, $\langle y_n, z\rangle \to 0$ αφού λόγω Bessel

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z, y_n\rangle|^2 \le \|z\|^2$$

<u>Ορισμός</u> Μια ακολουθία (x_n) σ' ένα χώρο Banach E λέμε ότι συγκλίνει ΑΣΘΕΝΩΣ (w) σ' ένα $x \in E$ αν: $\forall \varphi \in E^*$ ισχύει $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$

<u>πχ</u> Αν $\|x_n - x\| \to 0$ τότε βέβαια $x_n \xrightarrow{w} x$ γιατί $\forall \varphi \in E^*$ είναι συνεχής

$\not\Leftarrow$ (<u>πχ</u> ON ακολουθία σε Hilbert

Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός

Μια ακολουθία (u_n) σε έναν χώρο Hilbert H συγκλίνει ασθενώς σε ένα $u \in H$ αν για κάθε $v \in H$ ισχύει $\lim_n \langle u_n, v \rangle = \langle u, v \rangle$.

Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός

Μια ακολουθία (u_n) σε έναν χώρο Hilbert H συγκλίνει ασθενώς σε ένα $u \in H$ αν για κάθε $v \in H$ ισχύει $\lim_n \langle u_n, v\rangle = \langle u_n, v\rangle$.

Πρόταση

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H, K)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο T είναι συμπαγής.

(ii) Για κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία (u_n) του H, η ακολουθία (Tu_n) είναι $\|\cdot\|_K$-συγκλίνουσα.

(iii) Για κάθε ασθενώς μηδενική ακολουθία (v_n) του H ισχύει ότι $\|T\overset{v}{\cancel{u}}_n\|_K \to 0$.

Απόδ. (i) $\Longrightarrow$ (iii) Έστω $v_n \xrightarrow{w} 0$ ν.δ.ο. $\|Tv_n\|_K \longrightarrow 0$

Έστω όχι, $\exists\, \delta > 0$ $\exists$ υπακ. (v_{k_n}) της (v_n) ώστε $\|Tv_{k_n}\| \geq \delta$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$(v_n) \xrightarrow{w} 0$ οπότε $\forall u \in H$ έχω $(\langle v_n, u\rangle) \longrightarrow 0$

άρα είναι φραγμ.: $\exists\, M(u)$: $|\langle v_n, u\rangle| \leq M(u)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Επειδή ο H είναι χώρος Banach έπεται από το PUB ότι η (v_n) είναι ομοιόμορφα φραγμ., δηλ. $\exists M<+\infty$ ώστε $\|v_n\| \le M \ \forall n$

(πόρισμα του Baire)

(v_{k_n}) ενα φραγμένη, T συμπαγής άρα

(Tv_{k_n}) έχει μια υπακολουθία $\| \ \|$ - συγκλίνουσα

(Tw_n) δηλ το $\lim_{n\to\infty} Tw_n = y \in K$ υπάρχει

εστω

Ισχ $y=0$

Απόδ $\forall z \in K$, $\langle y, z\rangle = \lim_n \langle Tw_n, z\rangle = \lim_n \langle w_n, T^* z\rangle$

όμως, $(w_n) \prec (v_n)$ που $v_n \xrightarrow{w} 0$

$\Rightarrow w_n \xrightarrow{w} 0$ δηλαδή $\langle w_n, T^* z\rangle \to 0$

άρα $\langle y, z\rangle = 0 \ \forall z \in K$ οπότε $y=0$.

όμως έχω υπόθεση ότι $\|Tw_n\| \ge d$

οπότε θα έπρεπε

$\|y\| = \lim \|Tw_n\| \ge d$

ΑΤΟΠΟ

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

Εστ. (u_n) ακολουθία στο H ώστε $u_n \xrightarrow{w} u$

νδο (Tu_n) ενα $\| \ \|$ - συγκλίνουσα

$\Downarrow$

$u_n - u \xrightarrow{w} 0 \overset{(iii)}{\Longrightarrow} \|T(u_n - u)\|_K \to 0$

$\Rightarrow \|Tu_n - Tu\|_K \to 0$

(ii) ⇒ (i): <u>Υπόθεση</u> $\forall (x_n)$ που είναι w-συγκλίνουσα, η (Tx_n) είναι $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα

<u>Νδο</u> T συμπαγής

Αρκεί νδο ότι $\forall (x_n)$ φρ. ακολουθία έχει (Tx_n) είναι $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα

όπως είδαμε η (x_n) <u>έχει</u> w-συγκλίνουσα (Bessel)

οπότε από την υπόθεση έπεται ότι

(Tx_n) <u>έχει</u> νορμ-συγκλίνουσα υπ.

$\boxed{///}$

(Λείπει το [illegible] των προηγούμενων προτάσεων

Συμπαγείς Τελεστές

Πρόταση

Αν H, K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H,K)$ τότε

$$T \in \mathcal{K}(H,K) \iff T^*T \in \mathcal{K}(H) \iff T^* \in \mathcal{K}(K,H).$$

Παράδειγμα: Κάθε ολοκληρωτικός τελεστής είναι συμπαγής.
Απόδειξη. Αν $(A_k f)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)dy$ προσεγγίζουμε την k από γραμμ. συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων ορθογωνίων, οι οποίες ορίζουν ολοκληρωτικούς τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Απόδ. Αν $T \in \mathcal{K}(H,K)$, επειδή T^* φραγμ. έχω T^*T συμπαγής

Αν $T^*T \in \mathcal{K}(H) \xRightarrow{\text{Θεωρ}}$ $\forall$ ασθενώς ακολουθία (x_n) του H έχω

$$\langle (T^*T)x_n, x_n\rangle \longrightarrow 0$$
$$\|$$
$$\|Tx_n\|^2 \longrightarrow 0$$

(ασθενώς, αν $x_n \rightharpoonup 0$)

Έτσι $T^*T \in \mathcal{K}(H)$, άρα $T \in \mathcal{K}(H,K)$.

Έστω (y_n) μία φραγμ. ακολουθία του H

νδο (Ty_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

$$\|Ty_n - Ty_m\|^2 = \langle T(y_n - y_m), T(y_n - y_m)\rangle = \langle (T^*T)(y_n - y_m), y_n - y_m\rangle$$

$$\le \|T^*T(y_n - y_m)\| \, \|y_n - y_m\| \le 2(\sup_n \|y_n\|) \, \|T^*Ty_n - T^*Ty_m\|$$

όμως (y_n) φραγμ., η T^*T συμπ., άρα T^*Ty_n έχει μια

υπακ. (T^*Tw_n) συγκλίνουσα, άρα βασική

$$\|Tw_n - Tw_m\|^2 \le 2\sup\|w_n\| \, \|T^*Tw_n - T^*Tw_m\|$$

$\Rightarrow$ (Tw_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει

$\forall$ (y_n) φραγμ. ακολουθία βρήκα μια υπακολουθία

(w_n) της (y_n) ώστε η (Tw_n) να είναι $\|\ \|$-συγκλίνουσα

άρα δείξαμε ότι

T συμπαγής

———— o ————

T^* συμπαγής και T^*T συμπαγής άρα T συμπαγής

[Έστω T^*T συμπαγής, νδο T^* συμπαγής

Εφαρμόζω το προηγούμενο για $S = T^*$

Αν S^* συμπαγής τότε S συμπαγής

αν T συμπαγής τότε T^* συμπαγής]

συνεπώς, αν T συμπαγής

τότε θέτοντας $S = T^*$

έχουμε ότι S^* συμπαγής

έπεται ότι S συμπαγής

δηλ. ο T^* συμπαγής

<u>Συμπλήρωμα</u> Υποθέτω ότι $T \in \mathcal{B}(H, K)$

$\forall$ ορθοκανονική (x_n) στο H, η (Tx_n) είναι συγκλίνουσα

ΝΔΟ $T \in \mathcal{K}(H, K)$

(Tx_n) συγκλίνουσα και T^* φραγμ., έπεται (T^*Tx_n) είναι συγκλίνουσα

Άρα $A = T^*T \in \mathcal{B}(H)$ έχει την ιδιότητα

$\forall (x_n)$ ορθοκανονική στο H, η (Ax_n) είναι $\| \ \|$-συγκλίνουσα

- $\exists \lim_n Ax_n = y \in H$

όμως, $\forall z \in H$ $\langle y, z\rangle = \lim \langle Ax_n, z\rangle$

$= \lim \langle x_n, Az\rangle = 0$

διότι $\sum_n |\langle Az, x_n\rangle|^2 \leq \|Az\|^2$

άρα $\langle y, z\rangle = 0$ $\forall z \in H$, άρα $y = 0$

δείξαμε ότι $\|Ax_n\| \to 0$

και άρα $\langle Ax_n, x_n\rangle \to 0$

από το <u>θεώρημα</u> $A \in \mathcal{K}(H)$

$\|$

$T^*T \in \mathcal{K}(H)$

$\Longleftarrow$

$T \in \mathcal{K}(H, K)$ ■

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Θεώρημα

Αν K είναι συμπαγής τελεστής σε έναν χώρο Hilbert [6] H και
$\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$,
ή η εξίσωση

$$\lambda x - Kx = y \tag{3}$$

έχει μοναδική λύση $x \in H$ για κάθε $y \in H$,
ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

$$\lambda x - Kx = 0$$

έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, μάλιστα πεπερασμένου πλήθους.

Το Θεώρημα έπεται από τα επόμενα δύο Λήμματα.

Αν $K \in M_n(\mathbb{C})$ και, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, η $\forall y \in \ell^2[n]$ η $\lambda x - Kx = y$
έχει μοναδική λύση ($\iff \det(\lambda I - K) \neq 0$)
ή αλλιώς η αντίστοιχη ομογενής έχει λύσεις $x \neq 0$

[6] Το Θεώρημα αληθεύει και σε χώρους Banach.

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Απόδ. «Γεωμετρική σειρά με λόγο $\|\cdot\| < 1$ σε πλήρη χώρο συγκλίνει»

Θέτω $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^k$

$n > m$: $S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} T^k$ $\quad \|S_n - S_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|T^k\|$

< 1

$$\le \sum_{k=m+1}^{n} \|T\|^k = \frac{\|T\|^{m+1}}{1 - \|T\|} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

(S_n) είναι βασική στο $\mathcal{B}(H)$: χώρος Banach

άρα $\exists\, S \in \mathcal{B}(H)$: $S = \lim S_n$

$$(I-T)S = (I-T)\sum_{k=0}^{\infty} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k - T^{k+1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} (I - T^{n+1}) = I \quad \text{כיוון ש} \ \|T\| < 1 \Rightarrow \|T\|^{n+1} \to 0$$

$$S(I - T) = \sum_{k=0}^{\infty} (T^k - T^{k+1}) = I$$

כלומר $S = (I - T)^{-1}$ $\blacksquare$

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ και $\|T\| < 1$, ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το $\|\cdot\|$-όριο της σειράς

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Λήμμα

Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής $I - K$ έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.

<u>Από Fredholm</u> $\lambda \neq 0$ (A) $\forall y \in H$ η $(\cancel{\lambda} I - K)x = y$ έχει μοναδική λύση

(B) η $(\cancel{\lambda} I - K)x = 0$ έχει γραμμ. ανεξ.

Αρκεί το διατυπώνουμε για λ κάθε $\lambda = 1$

Αν: (B) $(I - K)x = 0$ έχει λύση $x \neq 0$ (μη)

ο υπόχωρος $M = \mathrm{Ker}(I - K) \neq \{0\}$

ο $K|_M$ είναι η id_M $\quad \forall x \in M, \; Kx = x$

και είναι συμπαγής (υπόθεση)

άρα τελικά ο M να είναι πεπερασμένης διάστασης

Αν (B) τότε η $x - Kx = 0$ έχει πεπερασμένο

πλήθος γραμμ. ανεξ. λύσεων

Αν όχι (B) νδο ισχύει (A)

δηλ. αν $x - Kx = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση (δηλ. $I-K$ είναι 1-1)

νδο $\forall y \; \exists x : y = x - Kx$ (δηλ. $I-K$ είναι επί)

<u>Απόδ.</u> K συμπαγής. Από το Θεώρημα, $\exists F \in F(H)$ πεπερ. τάξης

και $\|K - F\| < 1$

θέτω $K_1 = K - F \in \mathcal{B}(H)$ εφαρμόζω το Λήμμα:

$\|K_1\| < 1$ άρα $I - K_1$ έχει φραγμ. αντίστροφο

$\exists \; (I - K_1)^{-1}$

ορίζω $G = F(I-K_1)^{-1}$ είναι πεπερ. τάξης φρ.

<u>πρέπ</u> ~~G είναι 1-1~~ $I - G$ είναι 1-1

<u>Άρα</u> $(I-G)(I-K_1) = (I-K_1) - G(I-K_1) = I - K_1 - F$
$= I - K$: είναι 1-1 από υπόθ.

$I - G = (I - K)(I - K_1)^{-1}$: $(*)$

είναι 1-1

Παρατηρούμε ότι $\operatorname{im} G = \operatorname{im} F$ είναι πεπερασμένης διάστασης ($\dim F < \infty$)

$$\underset{H_0}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{im} G}}$$

Θέτουμε $T := (I-G)\big|_{H_0} : H_0 \to H_0$ (αν $x \in H_0 = \operatorname{im} G$ τότε $Tx = x - Gx \in H_0$)

ο T είναι 1-1, $\dim H_0 < \infty$

$\Longrightarrow$ ο είναι επί στο H_0

δηλ. $\forall v \in H_0 \ \exists u \in H_0$ τ.ω. $Tu = v$ δηλ. $(I-G)u = v$

(Gx) ~~G~~ $I-G$ είναι επί στο H!

$\forall y \in H$ θέτω $Gy = v$. $\exists u \in H_0$ τ.ω. $(I-G)u = v = Gy$

θέτω $x = y + u$ είναι

$$(I-G)x = (I-G)y + (I-G)u = y - Gy + v = y$$

Άρα $(I-G) : H \to H$ είναι 1-1 και επί γραμμικός

επομένως ο $I - K = \underbrace{(I-G)}_{1-1\ \text{επί}}\underbrace{(I-K_1)}_{\text{αντιστρ.}} : H \to H$ 1-1 και επί

$\forall y \in H \ \exists x \in H$ (και μάλιστα μοναδικό)

με $y = (I-K)x = x - Kx$

Ισχυρίζομαι ότι η λύση x εξαρτάται συνεχώς από το y

$x = (I-K)^{-1}y \quad \underset{=:\,Y}{(I-K)^{-1}}$ είναι και συνεχής

Αυτό έπεται από το Θεώρ Αναλυτ Απείρου (Σύνολα)

αλλά υπάρχει στοιχειώδης απόδειξη

Έστω όχι τότε $\exists (x_n)$ ακολουθία στο H, $\|x_n\| = 1$ $\forall n$

ώστε $\|Yx_n\| \geq n$ $\forall n$

Θέτω $y_n = \dfrac{Yx_n}{\|Yx_n\|}$: (y_n) φραγμ.

K συμπαγής

άρα (Ky_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Ky_{k_n})

δηλ το $\lim_n Ky_{k_n} = z$ υπάρχει.

$$\|(I-K)y_{k_n}\| = \left\| \frac{(I-K)Yx_{k_n}}{\|Yx_{k_n}\|} \right\| = \frac{\|x_{k_n}\|}{\|Yx_{k_n}\|} \leq \frac{1}{k_n} \to 0$$

$y_{k_n} - Ky_{k_n} \to 0$

$Ky_{k_n} \to z$

άρα $y_{k_n} \to z$ (επιπλέον $\|z\| = \lim_n \|y_{k_n}\| = 1$, $z \neq 0$)

$\Downarrow$ K συνεχ

$Ky_{k_n} \to Kz$

$Kz = z$ δηλ $(I-K)z = 0$

άτοπο: $I-K$ είναι 1-1

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ *και* $\|T\| < 1$, *ο* $I - T$ *είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το* $\|\cdot\|$*-όριο της σειράς*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Λήμμα

Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ *συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής* $I - K$ *έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.*

<u>Παρατήρηση</u> (i) Η υπόθεση «συμπαγής» δεν μπορεί να
να παραλειφθεί. <u>Αν</u> $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z}) : e_n \to e_{n+1}$, shift
τότε $\nexists x \neq 0$ με $Ux = x$ (άσκηση)
άρα ο $I - U$ <u>είναι</u> 1-1
αλλά δεν είναι αντιστρέψιμος

(iii) Η υπόθεση "λ≠0" δεν μπορεί να παραλειφθεί

π.χ. $K : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$e_n \longmapsto \frac{1}{n} e_n$

είναι συμπαγής και 1-1, αλλά δεν είναι επί

αντιστρέψιμος

(Πραγματικά: αν υπήρχε ο K^{-1}

θα έπρεπε $K^{-1} e_n = n e_n$

ασυνεχής)

M. Reed and B. Simon, Functional Analysis

Theorem VI.14 και εφαρμογές

(αναλυτικές οικογένειες $(K(z))$ συμπαγών τελεστών

$z \in D$: χωρίο στο $\mathbb{C}$

Εναλλακτικό Θεώρημα Fredholm (Fredholm alternative)

Λήμμα

Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ *και* $\|T\| < 1$, *ο* $I - T$ *είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι το* $\| \cdot \|$*-όριο της σειράς*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Λήμμα

Έστω $K \in \mathcal{B}(H)$ *συμπαγής τελεστής. Ο τελεστής* $I - K$ *έχει φραγμένο αντίστροφο αν και μόνον αν είναι 1-1.*

Δείτε σχετικά και την εξαιρετικά ενδιαφέρουσα συζήτηση για το θέμα στο blog του Terence Tao
a-proof-of-the-fredholm-alternative