Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

καλημέρα!

20/05/2022

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση:

Λήμμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ, τότε $A^* x = \bar{\lambda} x$.
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \operatorname{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[r, "A"] & H \\
 & \cup & \\
x_n \arrow[d] & (\ker A)^{\perp} \arrow[r, "A|"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \overline{\operatorname{im} A} = (\ker A^*)^{\perp} \arrow[d, "U"] \\
e_n & \ell^2 \arrow[r, "D_a"] & \ell^2 \\
 & e_n \arrow[r] & a(n) e_n
\end{tikzcd}$$

$(*)$

$$U A U^{-1} = D_a$$

$$A = U^{-1} D_a U \quad \text{(παραγοντοποίηση)}$$

$$D_a : e_n \longrightarrow a(n) e_n$$

δηλ $\quad D_a(x) = \sum_n a(n) e_n e_n^*(x)$

??

$$A(y) = \sum_n a(n) x_n x_n^*(y)$$

A : συμπαγής $\Rightarrow a(n) \to 0$

$\Downarrow$ (αργότερα)

$$A = \sum_n a(n) e_n e_n^*$$

συγκλίνει ως προς $\| \ \|_{B(H)}$

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.

(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

$A = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, P[x_n]$ $\qquad P[x_n] = x_n x_n^{*}$ ← τάξη 1

τα $a(n)$ μπορεί να επαναλαμβάνονται
όσες φορές όσο η $\dim M_\lambda$ όπου $\lambda = a(n)$

$A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda$ $\qquad P_\lambda = P(M_\lambda)$ $\qquad M_\lambda = \ker(A - \lambda I)$

πεπερ (πιθανώς > 1) τάξη
εκτός από το $P_0 = P(\ker A)$

Γενίκευση: $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τότε η $(*)$ γίνεται:

$\exists (X,\mu)$
$\exists U$
$\exists f \in L^\infty(X,\mu)$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "A"] \arrow[d, "U"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H \arrow[d, "U"] \\ L^2(X,\mu) \arrow[r, "M_f"] & L^2(X,\mu) \end{tikzcd}$$

$f \in L^\infty(X,\mu)$

$g \longmapsto fg$

$A = U^{-1} M_f U$

(απόδειξη χρειάζεται μέτρο)

η σχέση $A = \sum_{\lambda \in \sigma_p(A)} \lambda P_\lambda$ γίνεται τώρα:

$\exists$

$A = \int_{\sigma(A)} \lambda \, dP_\lambda$ $\qquad P$: "φασματικό μέτρο"
μέτρο με τιμές
προβολές

οι συνεχείς

ή $\forall x \in H$ $\exists \mu_x$ στο $\sigma(A)$

$\langle Ax, x \rangle = \int_{\sigma(A)} \lambda \, d\mu_x(\lambda)$

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή)

Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία (x_n) ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(a(n))$ ώστε

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A-\sum_{n=1}^{N}a(n)P[x_n]\right\|=0 \qquad (\star)$$

(όπου $P[x_n]$ η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το x_n). Τότε η ακολουθία $(a(n))$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Το Φασματικό Θεώρημα

Πόρισμα

Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Τότε (τα ξέρουμε $A = A^* \in \mathcal{K}(H)$)

$$(i) \qquad \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$$

$$(ii) \qquad \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}$$

Αποδ. (i) Γράφω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ όπου $\{\lambda_n\}$ αρίθμηση των $\sigma_p(A)$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$

$\forall x \in H$: $Ax = \sum_n \underbrace{\lambda_n P_n x}_{\perp \text{ ανά δύο}}$ $\longrightarrow \sum P_n x = x$

$\Downarrow$

$\|Ax\|^2 = \sum_n \|\lambda_n P_n x\|^2 \leq \sup_n |\lambda_n|^2 \sum_n \|P_n x\|^2 = \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2$

$\Longrightarrow \|A\| \leq \sup |\lambda(n)|$

Όμως η $|\lambda(\omega)|$ έχει μέγιστο ενδεχομένως σ.σ. του A

οπότε $\exists \max |\lambda(\omega)| = |\lambda_0|$

άρα $\forall x_0 \in M_{\lambda_0}$ $(\|x_0\|=1)$ τότε $Ax_0 = \lambda_0 x_0$ και

$$\|A\| \geq \|Ax_0\| = |\lambda_0|\,\|x_0\| = \max |\lambda|$$

συμπεραίνουμε ότι $\|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$

Απόδ (ii): [$\forall x$, $\|x\|=1$ έχω

$$|\langle Ax, x\rangle| \leq \|Ax\|\,\|x\| \leq \|A\|\,\|x\|^2 = \|A\|$$

άρα $\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax,x\rangle| \leq \|A\|$ δεν χρειάζεται

από τα ίδια] από το (i) $\exists \lambda_0 \in \sigma_p(A)$ ώστε $|\lambda_0| = \|A\|$

οπότε $\exists x_0$, $\|x_0\|=1$ με $Ax_0 = \lambda_0 x_0$

$$\Downarrow$$

$$\langle Ax_0, x_0\rangle = \lambda_0 \langle x_0, x_0\rangle = \lambda_0$$

$$\Rightarrow |\langle Ax_0, x_0\rangle| = |\lambda_0| = \|A\|$$

οπότε $\|A\| = |\lambda_0| = \max\{|\langle Ax,x\rangle| : \|x\|=1\}$

Γενικά, αν $A \in B(H)$ ισχύει ότι

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax,x\rangle| \leq \|A\| \leq 2 \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax,x\rangle|$$

όταν $AA^* = A^*A$ τότε ισότητα (συνέπεια του φασμ. θεωρήματος) για $A = A^*$ είναι ευκολότερο

$$A: \quad \underset{\{y_n : n\in\mathbb{N}\}}{\overset{}{H}} \longrightarrow \underset{\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}{K}$$

$\{y_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq H$ ορθοκανονική, $\{x_n : n\in\mathbb{N}\} \subseteq K$ ορθοκανονική

$$y_n \longrightarrow \lambda(n) x_n$$

Λέω ότι A φραγμένος και $\|A\| = \sup_n |\lambda(n)|$

$$(\operatorname{span}\{y_n : n\in\mathbb{N}\})^{\perp} \longrightarrow 0$$

Αλλά $\forall x\in H$: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n\rangle y_n + x'$, $x' \perp \{y_n : n\in\mathbb{N}\}$

Οπότε $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, y_n\rangle \lambda(n) x_n + 0$

συγκλίνει διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n\rangle \lambda(n)|^2 \le \sup_n |\lambda(n)|^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n\rangle|^2}_{\text{Bessel}} \le \|x\|^2$$

Άρα $Ax \in K$ καλά

και $\|Ax\|^2 \le \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2$

άρα $A \in B(H,K)$, $\|A\| \le \|\lambda\|$

Όμως $\forall n$, $Ay_n = \lambda(n) x(n)$ άρα $\|A\| \ge \|Ay_n\| = |\lambda(n)| \|x_n\|$

$\Rightarrow \|A\| \ge \sup |\lambda(n)|$: ισχύει

Χρησιμοποιώντας ότι αν $\{z_n\}$ ένα $\perp$ ανά δύο και $z_n \in H$

$\sum_n z_n$ συγκλίνει $\iff \sum \|z_n\|^2 < +\infty$

(άσκηση!)

Άλλη προσέγγιση: $\forall N \in \mathbb{N}$ ορίζω $A_N = \sum_{k=1}^{N} \lambda(k) x_k y_k^*$!

$$A_N(y_k) = \begin{cases} \lambda(k) x_k, & k \le N \\ 0, & k > N \end{cases}$$

φραγμ. τελεστές πεπερασμ. τάξης από $H \to K$

<u>Ισχ.</u> (A_N) συγκλίνει κατά σημείο ($\forall x \in H$):

$N > M$ $$\|A_N x - A_M x\|^2 = \Big\|\sum_{k=M+1}^{N} \underbrace{\lambda(k)\langle x, y_k\rangle x_k}_{\perp \text{ ανά δύο}}\Big\|^2$$

$$\overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k>M}^{N} |\lambda(k)|^2 |\langle x, y_k\rangle|^2$$

$$\le \sup_k |\lambda(k)|^2 \sum_{k=M+1}^{N} |\langle x, y_k\rangle|^2$$

$$\le \sup_k |\lambda(k)|^2 \|x\|^2$$

άρα $(A_N x)$ είναι βασική άρα στον K άρα συγκλίνει <u>ΚΑΤΑ ΣΗΜΕΙΟ</u>

Η σειρά δεν γενικά δεν συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$

π.χ. αν $\lambda(n) = 1$ $\forall n$:

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n (x)$$

μερική ισομετρία από τον $\overline{span}\{y_n\}$

στον $\overline{span}\{x_n\}$

στη $\| A_n x - A_m x \|$

πάρε $x = y_k$ με κάποιο $k \in (m, n]$

$\| A_n - A_m \| \geq \| A_n y_k - A_m y_k \| = |\lambda(k)| = 1$

Παρατήρηση: η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(n) x_n y_n$ συγκλίνει ως προς τη $\| \ \|$ του $\mathcal{B}(H, K)$

αν και μόνο αν $(\lambda(n))$ είναι στο c_0

Απόδειξη: πρώτα αποδείξτε ότι η (A_n) συγκλίνει $\| \ \|$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq m_0 \quad \| A_n - A_m \| < \varepsilon$

$\varepsilon^2 > \| A_n - A_{m_0} \|^2 \geq \| A_n(x) - A_{m_0}(x) \|^2 \quad \forall x$ με $\|x\| = 1$

πάρε $x = y_n$

τότε $|\lambda_n|^2$ οπότε $\forall n > m_0$ $|\lambda_n| < \varepsilon$ άρα $\lambda_n \to 0$

Αντίστροφα, αν $\lambda_n \to 0$ τότε

$\|A_N - A_M\| \le \max\{|\lambda(k)| : k \in (M,N]\}$

όμως $\forall \varepsilon>0 \ \exists m_0 : \forall k > m_0$ να έχω $|\lambda(k)| < \varepsilon$

οπότε $\forall N > M > m_0$ έχω

$$\|A_N - A_M\| < \varepsilon$$ ▨

Συνοψίζοντας: έχουμε $\{y_n\}$ ορθοκανονική στο H, $\{x_n\}$ ορθοκανονική στο K, $\{\lambda_n\}$ φραγμένη στο $\mathbb{C}$

$$A : y_n \longrightarrow \lambda_n x_n$$

$$\mathrm{span}\{y_n\}^\perp \longrightarrow 0$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n^*$$ (σύγκλιση ΚΑΤΑ ΣΗΜΕΙΟ

σύγκλιση στο $\|\ \|$ $\mathcal{B}(H,K)$

αν $\lambda_n \longrightarrow 0$

Ειδική περίπτωση: $H = K = \ell^2$, $x_n = y_n = e_n$

τότε $A = D_\lambda$

$$Ae_n = \lambda(n) e_n \quad \forall n$$

Είναι πάντα φραγμένος, και είναι συμπαγής $\iff \lambda_n \longrightarrow 0$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ!

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H\,.$$

Θεώρημα

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$.

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος και της πολικής αναπαράστασης τελεστή.

Απόδ. $A : H \to K$ συμπαγής

Έστω $T : H \xrightarrow{A} K \xrightarrow{A^*} H$ $\quad T = A^*A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής και θετικός

όπως από το φασμ. θεώρημα διαγωνοποίησης στο $(\operatorname{Ker} T)^\perp = (\operatorname{Ker} A)^\perp$

δηλ. $\exists$ ο.κ. βάση $\{y_n\}$ του $(\operatorname{Ker} A)^\perp$ $\exists$ (πεπερασμένη ή απειρική) ακολουθία $\mu(n)$

ώστε $T y_n = \mu(n) y_n$

$\forall n$. $\mu(n) \neq 0$ $\forall n$

$$\mu(n) = \langle T y_n, y_n \rangle = \langle A^*A y_n, y_n \rangle = \|Ay_n\|^2 > 0$$

$$A^*A y_n = \mu(n) y_n$$

και $Ay_n \neq 0$ $\forall n$

επίσης, $Ay_n \perp Ay_m$ όταν $n \neq m$!

$$\langle Ay_n, Ay_m \rangle = \langle A^*A y_n, y_m \rangle = \mu(n) \underbrace{\langle y_n, y_m \rangle}_{0} = 0$$

επομένως αν θέσω $\to x_n = \dfrac{Ay_n}{\|Ay_n\|}$ τότε $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στο K

Άρα $\|Ay_n\|^2 = \mu(n) > 0$

οπότε αν θέσω $s(n) = \sqrt{\mu(n)} > 0$

$(s(n))$ φθίνουσα ακολουθία

με

$$Ay_n = \|Ay_n\| x_n = s(n) x_n \quad \forall n$$

$$A : y_n \longrightarrow s(n) x_n$$

$x' \perp \{y_n\}$

$$(\operatorname{span}\{y_n\})^{\perp} \longrightarrow 0$$

άρα $\forall x \in H$ γράφεται $x = \sum \langle x, y_n \rangle y_n + x'$

$$Ax = \sum \langle x, y_n \rangle s(n) x_n + 0$$

άρα $A = \sum_{n=1}^{\infty} s(n) x_n y_n^*$

και επειδή $s(n) \to 0$

η σειρά συγκλίνει ως προς $\| \ \|$ του $\mathcal{B}(H,K)$

Άσκηση Πολική αναπαράσταση:

$A = V|A|$ όπου $|A| = (A^*A)^{1/2}$

V: μερική ισομετρία από το $(\ker|A|)^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$

στο $\overline{\operatorname{im} A} = (\ker A^*)^{\perp}$

όμως ο $|A|$ είναι θετικός και συμπαγής (γιατί;)

Ξέρουμε επίσης ότι ο A^*A θετικός και συμπαγής

οπότε $\exists$ ορθ. βάση $\{y_n\}$ του $(\operatorname{Ker} A^*A)^\perp = (\operatorname{Ker} A)^\perp$

και θετικά $\mu(n)$ ώστε

$$A^*A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, y_n y_n^*$$

Ξέρουμε επιπλέον $\mu(n) \longrightarrow 0$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sqrt{\mu(n)}}_{=s(n)} \longrightarrow 0$$

(*) Αφού από ! V

έχω $B = |A|$

έδειξα ο $|A|$ είναι συμπαγής

και έτσι $\sum s_n y_n y_n^*$ συγκλίνει

στη $\| \ \|$ του $B(H)$

σε συμπαγή τελεστή B

με $B^2 = \left(\sum s_n y_n y_n^*\right)^2 =$

$= \left(\sum_n s_n P[y_n]\right)\left(\sum_m s_m P[y_m]\right)$

$= \sum_{n,m} s_n s_m P[y_n] P[y_m]$ $\quad \perp$ ανά 2

$= \sum_n s_n^2 P[y_n]$

$= A^*A \quad (*)$

$$A = V|A| = V \sum_{n=1}^{\infty} s_n y_n y_n^*$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} s_n \underbrace{(V y_n)}_{=x_n} y_n^*$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n y_n^*$$

επειδή $V\big|_{\overline{\operatorname{span}\{y_n\}}}$ ισομετρία

άρα $\{V y_n\} = \{x_n\}$ ορθοκανονική ακολουθία

<u>Ισοδύναμα</u> Κάθε συμπαγής $A \in B(H,K)$ παραγοντοποιείται

$$A : H \xrightarrow{V} K \xrightarrow{D_s} K$$

$$y_n \longrightarrow x_n \longrightarrow s(n)x_n$$

$$\overline{\mathrm{span}\{y_n\}}^{\perp} \longrightarrow 0$$

μερική ισομετρία

$$A := D_s V$$

διαγώνιος συμπαγής

<u>Εφαρμογή</u> Κάθε θετικός συμπαγής τελεστής έχει μοναδική θετική τετρ. ρίζα:

<u>Απόδ.</u> Έστω $T \in B(H)$ συμπαγής και θετικός

γράφω (λόγω θεωρήματος)

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου (λ_n) σημεία στο $\sigma_p(A)$ μόνο πιθανό σημείο συσσώρ. το 0

όπου θέτω $\mu_n = \begin{cases} \sqrt{\lambda_n} & \text{αν } \lambda_n > 0 \\ 0 & \text{αν } \lambda_n = 0 \end{cases}$

παρατηρώ ότι ζητούμενο μόνο εκδοχές ... ≥ 0
όπως ο τελεστής ιδιοπροβ. του αρχικού T

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_n$$

είναι συμπαγής + θετικός (διότι ~ Σ στοιχείων
συν || || του ορίου)

και το $\sum_{n=1}^{N} \mu_n P_n$ ένα πεπερ. τάξης

διότι $P_n = P(M_{\mu_n})$ έχει πεπερ. διάσταση
εκτός αν $\mu_n = 0$

οπότε $\sum_{n=1}^{N} \mu_n P_n = \sum_{\substack{n=1 \\ \mu_n \neq 0}}^{N} \mu_n P_n$: πεπερ. τάξης

όπως πριν, $S^2 = T$ άρα S είναι μία $\sqrt{\ }$ του T

Μοναδικότητα: αν A ένας θετικός τελεστής με $A^2 = T$

και γράψουμε $T = \sum a_n x_n \otimes x_n$

(όπως στη γενική περίπτωση)

έχω $T x_n = a_n x_n$

?? ισχύει $A x_n = \sqrt{a_n} x_n$?? $\perp$