Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

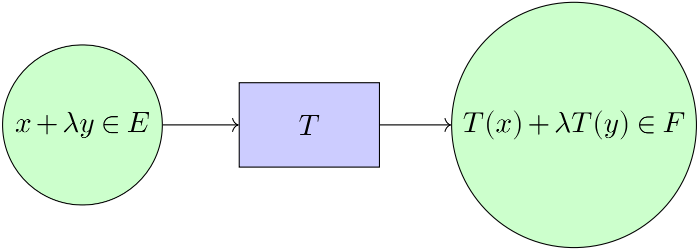
Εαρινό Εξάμηνο 2021-22

Περιεχόμενα

Γραμμικοί τελεστές και πίνακες

Ορισμός

Αν E, F είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε $\mathcal{L}(E, F)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$. Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{L}(E)$ αντί για $\mathcal{L}(E, E)$.



Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

• Αν $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle), (F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, κάθε επιλογή ορθοκανονικών βάσεων $\{e_1, \dots, e_m\}$ του E και $\{f_1, \dots, f_n\}$ του F ορίζει ισομορφισμούς $V : E \to \mathbb{K}^m$, $W : F \to \mathbb{K}^n$, οπότε ο πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια γραμμική απεικόνιση

$V : E \to \mathbb{K}^m$

$\sum \xi_i e_i \to \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}$

$$\tilde{T}_A : E \xrightarrow{V} \mathbb{K}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{K}^n \xrightarrow{W^{-1}} F\,.$$

$$\sum \xi_i e_i \to \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \longrightarrow \sum \eta_j f_j$$

Παρατηρούμε ότι

$$a_{ik} = \left\langle \tilde{T}_A e_k, f_i \right\rangle, i = 1, \dots n, \ k = 1, \dots m.$$

$$\tilde{T}_A(e_k) \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} \xrightarrow{w^{-1}} \sum_j a_{jk} f_j$$

$$\langle \tilde{T}_A(e_k), f_i \rangle_F = \langle \sum_j a_{jk} f_j, f_i \rangle = \sum_j a_{jk} \langle f_j, f_i \rangle = a_{ik}$$

Πίνακες και Τελεστές

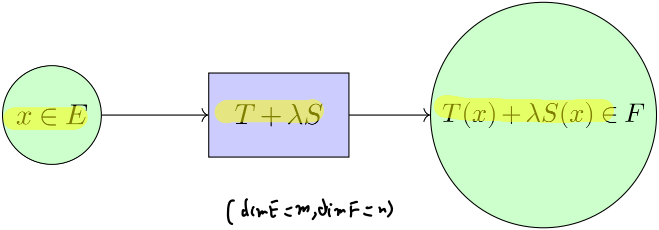
- Αντίστροφα, κάθε γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ ορίζει έναν $n \times m$ πίνακα $A_T = [a_{ik}]$ από την σχέση $a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$.

Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(E, F)$

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = T(x) + \lambda S(x) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{L}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.



(dimE = m, dimF = n)

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(E, F) : A \mapsto T_A$ είναι 1-1, επί, γραμμική.

Εξαρτάται από την επιλογή των βάσεων στους E, F.

Πίνακες και Τελεστές

Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ *του* E *και* $\{f_1, \dots, f_n\}$ *του* F, *η απεικόνιση* $T \to \langle Te_k, f_i \rangle$ *είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο* $\mathcal{L}(E, F)$ *επί του γραμμ. χώρου* $M_{nm}(\mathbb{K})$.

Πίνακες και Τελεστές

Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ *του* E *και* $\{f_1, \dots, f_n\}$ *του* F*, η απεικόνιση* $T \to \langle Te_k, f_i \rangle$ *είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο* $\mathcal{L}(E, F)$ *επί του γραμμ. χώρου* $M_{nm}(\mathbb{K})$.

Πίνακες και Τελεστές

Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *του* E *και* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *του* F, *η απεικόνιση* $T \to \langle Te_k, f_i \rangle$ *είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο* $\mathcal{L}(E, F)$ *επί του γραμμ. χώρου* $M_{nm}(\mathbb{K})$.
Όταν $n = m$, *απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικότερα όταν ορίζεται η σύνθεση).*

Πίνακες και Τελεστές

Πρόταση

Αν επιλέξω ορθοκανονικές βάσεις $\{e_1, \dots, e_m\}$ *του* E *και* $\{f_1, \dots, f_n\}$ *του* F, *η απεικόνιση* $T \to \langle Te_k, f_i \rangle$ *είναι γραμμικός ισομορφισμός από τον χώρο* $\mathcal{L}(E, F)$ *επί του γραμ. χώρου* $M_{nm}(\mathbb{K})$.
Όταν $n = m$, *απεικονίζει τη σύνθεση τελεστών στο γινόμενο πινάκων (ή γενικότερα όταν ορίζεται η σύνθεση).*

Σύνθεση $\rightsquigarrow$ γινόμενο πινάκων: Αν επίσης ένας G έχει ορθοκανονική βάση $\{g_1, \dots, g_k\}$, και $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$ είναι γραμμικές με
$T \rightsquigarrow [a_{ij}] \in M_{nm}$ και $S \rightsquigarrow [b_{ij}] \in M_{mk}$ τότε
$ST := S \circ T \rightsquigarrow [c_{ij}] \in M_{nk}$ όπου $c_{ij} = \sum_r a_{ir} b_{rj}$.

$ST = S \circ T : E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$.
Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x \rangle_E = \langle y, T_A x \rangle_F$ για κάθε $y \in F, x \in E$.

Πίνακες και Τελεστές

Αν $A \in M_{nm}$, ορίζουμε $A^t \in M_{mn}$ τον $A^t = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$.
Θέτουμε $A^* = [\overline{a_{ji}}]$. Τότε $\langle T_{A^*} y, x \rangle = \langle y, T_A x \rangle$ για κάθε $y \in F, x \in E$.
Συνεπώς:

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle \cdot, \cdot \rangle), (H_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο* *πεπερασμένης διάστασης*, *και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1\rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Πίνακες και Τελεστές

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και $T : H_1 \to H_2$ ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

$\{e_1 \dots e_m\} \subseteq E$, $\{f_1 \dots f_n\} \subseteq F$ $\quad A = A_T = [a_{ij}]$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα $A := A_T$. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

$B = A^* = [\overline{a_{ji}}]$

$$\langle T_B x_2, x_1 \rangle = \langle x_2, T x_1 \rangle$$

Απόδ.

$x_1 = e_k \ (k = 1 \dots m)$ $\quad \langle T_B(f_i), e_k \rangle = b_{ki} = \overline{a_{ik}}$

$x_2 = f_i \ (i = 1 \dots n)$ $\quad \langle f_i, T_A(e_k) \rangle = \overline{\langle T_A(e_k), f_i \rangle} = \overline{a_{ik}}$

άρα, λόγω γραμμικότητας, η σχέση ισχύει $\forall x_1 = \sum \xi_k e_k \in E$

$\forall x_2 = \sum \eta_i f_i \in F$

Παρατήρηση

Αν $(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle), (H_2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης, και* $T : H_1 \to H_2$ *ένας τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής* $T^* : H_2 \to H_1$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\langle T^* x_2, x_1\rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1\rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ιδέα της απόδειξης: Επιλέγουμε ορθοκανονικές βάσεις και θεωρούμε τον πίνακα $A := A_T$. Αν B είναι ο πίνακας $B = A^*$, ο τελεστής $T^* := \tilde{T}_B$ ικανοποιεί την σχέση $\langle T^* x_2, x_1\rangle = \langle x_2, T x_1\rangle$ για κάθε $x_1 \in H_1, x_2 \in H_2$.

Ιδιότητες: Αν $T, S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $R \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*, \quad (TR)^* = R^* T^*, \quad T^{**} = T.$$

Τελεστές πρώτης τάξης

Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle_E v \in F$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \xrightarrow{v^*} [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\sum_k \bar{v}_k x_k \right)}_{\langle x, u \rangle \in \mathbb{K}} \longrightarrow \langle y, - \rangle \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

$$\Theta_{u,v} = \underline{vu^*} = \underbrace{v \otimes u^*}_{\text{[illegible]}} = |v\rangle\langle u|$$

$Im(\Theta_{u,v}) = span\{v\}$: διάσταση ≤ 1

πρώτης τάξης (όταν $v \neq 0$)

Τελεστές πρώτης τάξης

Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$\Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle v$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$\Theta_{u,v} = vu^* = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Άσκηση

- Ο συζυγής: $(vu^*)^* = uv^*$
- Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι $=0$;
- Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^{N} s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K}, u_k \in E, v_k \in F$.
- Μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική βάση στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική βάση στον F.
- Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές βάσεις;

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

$T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ γραμμική
$\exists\, a \in \mathbb{R} : T(x) = ax$
ώστε αν η T είναι φραγμ. συνάρτηση τότε
$\{ |T(n)| = |na| : n \in \mathbb{N} \}$ φραγμ.
$\Downarrow$
$a = 0$

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

διότι αν ισχύει αυτό, τότε $\forall x \in \text{ball}(E)$ έχω $\|Tx\|_F \leq M \cdot 1$ άρα $\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|_F \leq M$ άρα $< +\infty$

αντίστροφα αν $\|T\| < +\infty$ τότε $\forall x \in E$, $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in \text{ball}(E)$ και άρα $\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|_F \leq \|T\|$

άρα: $\frac{1}{\|x\|}\|Tx\| \leq \|T\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \|T\|\,\|x\| \quad \forall x \neq 0$

και για $x = 0$

οπότε υπάρχει κατάλληλο M: $M = \|T\|$

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$.

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται **φραγμένη** ή **φραγμένος τελεστής (bounded operator)** αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \leq 1\} < +\infty.$$

$\mathcal{B}(E,F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

... ισοδύναμα, αν υπάρχει M ώστε για κάθε $x \in E$ να ισχύει $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$. (: $\|T\|$ = σταθερά Lipschitz για τη T)

$$\|Tx - Tx'\|_F \stackrel{\text{γρ.}}{=} \|T(x-x')\|_F \stackrel{\text{φρ.}}{\leq} \|T\| \, \|x-x'\|_E$$

T συνεχής σε $x_0 \in E$ $\Rightarrow$ T συνεχής στο 0 $\Rightarrow$ $\|T\| < +\infty$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

T συνεχής στο $x_0 \in E$: $\forall (x_n)$ του E με $x_n \xrightarrow{\| \|_E} x_0$ έχω $Tx_n \xrightarrow{\| \|_F} Tx_0$

νδο T συνεχής στο $0 \in E$: $\forall (y_n)$ του E με $y_n \to 0$ $\Downarrow$

τότε $y_n + x_0 \to x_0$ $\quad T(y_n + x_0) \to Tx_0$

$T(y_n) + T(x_0) \to Tx_0$

$\Downarrow$

$T(y_n) \xrightarrow{\| \|_F} 0$

T συνεχής στο $0 \in E$ τότε $\|T\| < +\infty$

$\Downarrow$

για $\epsilon = 1$ $\exists \delta > 0$: όταν $x \in B(0,\delta) \Rightarrow Tx \in B(T(0), 1)$

δηλ. $\|x\|_E < \delta \Rightarrow \|Tx\|_F < 1$

$\forall x \in E$, $x \neq 0$ έχω $\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|} = y$ έχω $\|y\| = \frac{\delta}{2} < \delta$

οπότε $\|Ty\| < 1$

δηλ. $\left\| T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_F < 1$ $\quad \forall x \in E, x \neq 0$

άρα $\Rightarrow \frac{\delta}{2\|x\|_E} \|Tx\|_F < 1 \iff \|Tx\|_F < \frac{2}{\delta} \|x\|_E$

ισχύει για $x = 0$

=

επομένως T φραγμ. και $\|T\| \leq \frac{2}{\delta}$

D, $F_0 \subseteq F$ χώροι με νόρμα (πχ από έσω γινόμενο)

$\subseteq E$: πυκνό το D όταν $E = \overline{D}$

" F_0 όταν $F = \overline{F_0}$

Μου δίνουν:

$T : D \to F_0 \subseteq F$ γραμμικός τελεστής να θεωρώ $T : D \to F$

χώρος Banach

Ενδιαφερόμαστε αν

$\exists ?$ $\tilde{T} : E \to F$ γραμμική και συνεχή επέκταση

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,* $D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση

$$\tilde{T} : E \to F \quad \text{δηλ.}\ \tilde{T}|_D = T\,.$$

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T *είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \to F \quad \delta\eta\lambda.\ \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Απόδειξη στο αρχείο extend21.pdf

Απόδ. $T:(D,\|\ \|_E) \longrightarrow (F,\|\ \|_F)$ γραμμική + συνεχής

$E=\overline{D}$

Αναγνωρίστε: α) $\exists\ \tilde{T}: E \longrightarrow F$ γραμμ. τελεστής με $\tilde{T}|_D = T$

2ος συνεχής της T συνεχής (περιορισμένη επέκτ.)

Μοναδικότητα: α) $\exists\ S: E \to F$ γραμμ. τελεστής με $S|_D = \tilde{T}$

τότε $S(x) = \tilde{T}(x)$ $\forall x \in D$

αφού $\forall x \in E$ $\exists (x_n)$ από το D ώστε $x_n \xrightarrow{\|\ \|_E} x$

$$S(x) \underset{S \text{ συνεχής}}{=} \lim S(x_n) \underset{S|_D = T|_D}{=} \lim \tilde{T}(x_n) \underset{T \text{ συνεχής}}{=} \tilde{T}(x) \quad \text{άρα } \tilde{T} = S$$

Υπαρξη Θέλω $\forall x \in E$ να ορίσω $\tilde{T}(x) \in F$ έτσι ώστε αν $x \in D$ να έχω $\tilde{T}(x) = T(x)$

$E = \overline{D}$ $\exists (x_n)$ από $x_n \in D$ με $x_n \xrightarrow{\|\ \|_E} x$

Θέλω να ορίσω $\tilde{T}(x) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} T(x_n)$ (ως προς τη $\|\ \|_F$)

Μπορώ; ΝΑΙ

Παρατηρώ ότι $\forall \nu, \mu \in \mathbb{N}$ $\|T(x_n) - T(x_m)\|_F$ αφού T συνεχής άρα φρ

$$\overset{\text{γρ}}{=} \|T(x_n - x_m)\|_F \overset{\text{φρ}}{\leq} \|T\|\ \|x_n - x_m\|_E$$

όπου, αφού (x_n) είναι βασική (αφού συγκλίνει)

έπεται ότι και η (Tx_n) είναι βασική στο F

ο $(F, \|\ \|_F)$ έχει υποτεθεί πλήρης, άρα το όριο $(*)$ υπάρχει!

Αν πάρω (x_n') του D με $x_n' \xrightarrow{\|\ \|} x$ πού ξέρω ότι το $\lim T(x_n')$

Είναι το ίδιο;

$$\|Tx_\nu - Tx'_\nu\|_F \le \|T\| \, \|x_\nu - x'_\nu\|_E \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$$

οπότε $\lim_\nu \|Tx_\nu - Tx'_\nu\|$ $\exists$ και $=0$ άρα

$$\lim Tx'_\nu = \lim Tx_\nu = \tilde{T}(x)$$

έδειξα ότι το $\tilde{T}(x)\in F$ εξαρτάται από το $x\in E$ και όχι από την (x_ν) του D

Έχω ορίσει τώρα:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \tilde{T}(x) = \lim_\nu T(x_\nu) \end{aligned}$$

Πρέπει ότι η $\tilde{T}$ επέκταση της T:

$\forall x\in D$ και θεωρώ (x_ν): $x_\nu = x$

τότε $\tilde{T}(x) = \lim T(x_\nu) = Tx$

Επίσης: $\tilde{T}$ γραμμική. ✓

$x, x'\in E, \lambda\in\mathbb{K}$ $\quad (x_\nu)$ του D $x_\nu \to x$

(x'_ν) του D $x'_\nu \to x'$

$x_\nu + \lambda x'_\nu \longrightarrow x + \lambda x'$

άρα από τον ορισμό της $\tilde{T}$

έχω $\tilde{T}(x+\lambda x') = \lim_\nu T(x_\nu + \lambda x'_\nu)$

$T(x_\nu) \to \tilde{T}(x)$ $\quad$ (ορισμός της $\tilde{T}$)

$\lambda T(x'_\nu) \to \lambda \tilde{T}(x')$

$T(x_\nu) + \lambda T(x'_\nu) \longrightarrow \tilde{T}(x) + \lambda \tilde{T}(x')$

$\forall x \in E$, (x_ν) του D : $x_\nu \to x$

$$\tilde{T}(x) = \lim T(x_\nu) \qquad \|T(x_\nu)\| \le \|T\|\,\|x_\nu\|$$

$$\|\tilde{T}(x)\|_F = \lim_\nu \|T(x_\nu)\|_F \le \|T\| \lim_\nu \|x_\nu\| = \|T\|\,\|x\|$$

$$\|\tilde{T}(x)\|_F \le \|T\|\,\|x\|$$

είναι από το ορισμό

$$\sup\{\|\tilde{T}(x)\|_F : x \in ball(E)\} \le \|T\|$$

και $\|\tilde{T}\| \le \|T\|$: $\tilde{T}$ είναι φραγμ., άρα συνεχής

όμως $\forall x \in D$ έχω $\|\tilde{T}(x)\| = \|Tx\|$

άρα $\|\tilde{T}\| = \sup\{\|\tilde{T}x\|_F : x \in ball\, E\} \ge \sup\{\|Tx\|_F : x \in ball\, D\} = \|T\|$

άρα $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ $\blacksquare$

παρ/ $D = c_{00}$ $\quad F = \ell^2$

$E = \ell^2$

$T : c_{00} \to \ell^2$ γραμμ. και να παρατηρήσουμε με τη επέκταση

$\quad = \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

για να ορίσω T γραμμ., αρκεί να τον ορίσω στα $\{e_n\}$

και να επεκτείνω γραμμικά

$$T(e_n) := f_n \in \ell^2 \quad \forall n$$

τότε $\forall x \in c_{00}$ γράφω $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ (πεπερ. $\langle x, e_n \rangle = 0$ εκτός από πεπερ. πλήθος n)

και θέτω: $T(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle T(e_n)$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle f_n$$

παράδειγμα ας ορίσω $T(e_n) = a_n e_n$ όπου $a_n \in \mathbb{K}$ $\forall n$

δηλ. $T \rightsquigarrow A_T = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}_{\infty \times \infty}$

$T : c_{00} \to c_{00}$

Ερώτηση πως επεκτείνεται $\tilde{T} : \ell^2 \to \ell^2$;

αυτό συμβαίνει αν-ν T είναι συνεχής: $(c_{00}, \| \|_2) \xrightarrow{T} (c_{00}, \| \|_2)$

Δηλ. αν-ν : $T:(c_{00}, \|\cdot\|_2) \to (c_{00}, \|\cdot\|_2)$
ένα φραγμένος ως προς την $\|\cdot\|_2$

Δηλ. $\exists M<+\infty$ ώστε
$\forall x\in c_{00}$, να ισχύει $\|Tx\|_2 \le M\|x\|_2$

ισοδύναμα, αν $\|x\|_2 \le 1$ να ισχύει $\|Tx\|_2 \le M$

$\iff \sum_{n=1}^{m} |\langle x,e_n\rangle|^2 \le 1$ να ισχύει

$\|\sum \langle x,e_n\rangle Te_n\|_2^2 \le M^2$

$\|$

$\|\sum \langle x,e_n\rangle c_n e_n\|_2^2$

$\|$ Πυθ.

$\sum |\langle x,e_n\rangle c_n|^2 \le M^2$

Ισχ. $\|T\|$ φραγμ. $\iff (c_n)$ είναι φραγμ.
και μάλιστα $\|T\| = \sup|c_n|$

Απόδ. Αν (c_n) είναι φραγμ. με $\|c\|_\infty = \sup|c_n|$
τότε $\forall x\in c_{00}$

$$\|Tx\|_2^2 = \sum |\langle x,e_n\rangle|^2 |c_n|^2$$
$$\le \|c\|_\infty^2 \sum |\langle x,e_n\rangle|^2 = \|c\|_\infty^2 \|x\|_2^2$$

Δηλ. $\forall x\in c_{00}$, $\|Tx\|_2 \le \|c\|_\infty \|x\|_2$ οπότε T φραγμ. με $\|T\| \le \|c\|_\infty$ από ορισμό

Αντίστροφα: Αν υποθέσουμε $\|T\| < +\infty$
τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ $T(e_n) = c_n e_n$

οπότε $\|c_n e_n\|_2 = \|T(e_n)\|_2 \le \|T\|\,1$

$\|$

$|c_n|$ άρα $\forall n$ $|c_n| \le \|T\|$
άρα c φραγμ. και $\|c\|_\infty \le \|T\|$

Ένα διαγώνιο $\infty \times \infty$ πίνακα $A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$

ορίζει πάντα $T_A : C_\omega \to C_\omega$ γραμμική απεικ.

πως δείξαμε ότι $\tilde{T} : \ell^2 \to \ell^2$ φραγμ. αν-ν η (a_n) ένα φραγμ.

με $\|\tilde{T}\| = \|a\|_\infty$

Πρότ Αν η (a_n) ΔΕΝ είναι φραγμ., τότε ο T_A δεν στέλνει όλο το ℓ^2 μέσα στο ℓ^2! Μπορεί να βρω $x \in \ell^2$ τ.ω. $T_A(x) \notin \ell^2$

Απόδ Αφού $\|a\|_\infty = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k_n \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_{k_n}| > n$

οπότε θεωρώ το εξής $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{k_n}$

$$= (0, \dots, 0, \underset{k_1}{\uparrow}{1}, \dots, 0, \underset{k_2}{\uparrow}{\tfrac{1}{2}}, \dots)$$

$$\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \text{ άρα } x \in \ell^2$$

$$Tx = (0, \dots, a_{k_1}, \dots, \frac{a_{k_2}}{2}, \dots, \frac{a_{k_3}}{3}, \dots)$$

και $\|Tx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_{k_n}|^2}{n^2} > \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$

άρα $Tx \notin \ell^2$

Αν έχω ένα φρ. τελεστή $T : \ell^2 \to \ell^2$

τότε ορίζω $a_{ij} = \langle T(e_j), e_i \rangle_{\ell^2}$

και έχω ένα άπειρο πίνακα $A = [a_{ij}]$

Αντίστροφα, αν μου δώσουν ένα " " " $a_{ij} \in \mathbb{K}$

<u>ΔΕΝ</u> ορίζει απαραίτ. φραγμ. τελεστή $T_A : \ell^2 \to \ell^2$

<u>πχ</u> αν $a_{i1} = 1 \ \forall i$

$a_{ij} = 0$ για $j > 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \\ \vdots & 0 \\ 1 & \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \notin \ell^2$$

Προφανής αναγκαία συνθήκη είναι κάθε στήλη $[a_{ij}]_{i=1}^{\infty}$ να είναι

ℓ^2-να αθροίσιμη $\forall j$, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$

Δεν αρκεί. Παράδειγμα;