Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Γραμμικών Τελεστών! (712)

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH122/

Καλημέρα!

17/05/2022

Το Φάσμα

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Το Φάσμα

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο }\}.$$

Το Φάσμα

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

έχει ρίζα λ_0, από το θεώρ.

Θεώρ. Liouville ακέραιες φραγμ. $\Longrightarrow$ Θεώρ. Άλγεβρας

$\Downarrow$

σταθερά

οπότε $\det(A - \lambda_0 I) = 0$

άρα $A - \lambda_0 I$ δεν έχει αντίστροφο

$A \in B(E) \overset{?}{\Longrightarrow} \det(A - \lambda I) = ?$

Παρόλα αυτά αποδεικνύεται ότι

$\lambda \longmapsto A - \lambda I \in B(E)$

είναι "ακέραια" !!!

Το Φάσμα

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Ισχύει ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$.
Έστω H χώρος Hilbert.

Πρόταση

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε
(α) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.
(β) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.
Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Απόδ (β): Από το (α) $\exists (x_n)$ ώστε $\|x_n\| = 1$ τ.ω.
$|\langle Ax_n, x_n\rangle| \longrightarrow \|A\|$
Θέτω $\lambda_n = \langle Ax_n, x_n\rangle \in \mathbb{R}$: (λ_n) φρ.

Όποτε έχω ακολ. (x_n) που συγκλίνει σε κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \lambda \qquad \Rightarrow |\lambda| = \|A\|$$

$$| \longrightarrow \|A\|$$

Για δείξω ότι $\lambda \in \sigma(A)$ Ισχυρίζομαι $\|(A - \lambda I)\underset{y_n}{x_n}\| \to 0$ $(A = A^*)$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle Ay_n, y_n \rangle \in \mathbb{R}$

$$\|Ay_n - \lambda y_n\|^2 = \|Ay_n\|^2 - \langle Ay_n, \lambda y_n \rangle - \langle \lambda y_n, Ay_n \rangle + \|\lambda y_n\|^2$$

$$= \|Ay_n\|^2 - 2\lambda \langle Ay_n, y_n \rangle + |\lambda|^2$$

$$\leq \|A\|^2 - 2\lambda \underset{\substack{\downarrow \\ -2\lambda\lambda}}{\langle Ay_n, y_n \rangle} + \|A\|^2 = 2\|A\|^2$$

$$\to 0$$

Επομένως $\|(A - \lambda I)y_n\| \to 0$ ενώ $\|y_n\| = 1$

Αν $(A - \lambda I)$ ήταν αντιστρέψιμο τότε

$\exists B \in \mathcal{B}(H)$: $B(A - \lambda I) = I$

$$\lim_n B(A - \lambda I)y_n = B \lim_n (A - \lambda I)y_n = 0$$

$$\underset{\lim_n y_n \neq 0}{\parallel}$$

$\lim_n y_n \neq 0$ διότι $\|y_n\| = 1$

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert. Υπενθύμιση:

$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $\nexists$ $A - \lambda I$ αντ. ... ή αλλιώς (όπως $\lambda \in \sigma(A)$) το $\lambda \in \sigma_p(A)$

Πρόταση (Εναλλακτικό Θεωρ. Fredholm)

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, *τότε κάθε* $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ *είναι ιδιοτιμή.*

Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert. Υπενθύμιση:

Πρόταση (Εναλλακτικό Θεωρ. Fredholm)

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, τότε κάθε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή.

Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: π.χ. D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.

$D_a(x) = 0$ όπου $x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$

θα έχω $\sum_n \langle x, e_n \rangle \frac{1}{n} e_n = 0$

$\Downarrow$

$\langle x, e_n \rangle \frac{1}{n} = 0 \quad \forall n$

$\Downarrow$

$\langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n$

$\Downarrow$

$x = 0$

σε ℓ^2

$D_a(e_n) = \frac{1}{n} e_n$

Είναι συμπαγής διότι $\frac{1}{n} \to 0$

αλλά είναι 1-1

άρα $0 \notin \sigma(D_a)$

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert. Υπενθύμιση:

Πρόταση (Εναλλακτικό Θεωρ. Fredholm)

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, τότε κάθε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή.

Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: π.χ. D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.

Πόρισμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, $A \neq 0$ *τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.*

$\lambda \in \sigma(A)$ με $|\lambda| = \|A\| \neq 0$

$\lambda \neq 0$ άρα $\lambda \in \sigma_p(A)$

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert. Υπενθύμιση:

Πρόταση (Εναλλακτικό Θεωρ. Fredholm)

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, τότε κάθε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή.

Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: π.χ. D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.

Πόρισμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Έστω H χώρος Hilbert. Υπενθύμιση:

Πρόταση (Εναλλακτικό Θεωρ. Fredholm)

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, τότε κάθε $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$ είναι ιδιοτιμή.

Πρτρ. Σε απειροδιάστατο χώρο αν $A \in \mathcal{K}(H)$ τότε $0 \in \sigma(A)$.

Παράδειγμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: π.χ. D_a όπου $a = (\frac{1}{n})$.

Πόρισμα

Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.

Άρα, υπάρχει μοναδιαίο $x \in H$ όπου ο A *«πιάνει τη νόρμα του»*,
δηλ. $\|Ax\| = \|A\|$.

(Γενικά, $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$
όταν είναι $A = A^* \in \mathcal{K}(H)$ (αλλά όχι $\forall A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ [illegible])
$\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Πρόταση

Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.
(i) Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.
(ii) Αν ο A είναι φυσιολογικός, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.

Σχόλιο Το αποτέλεσμα ισχύει για οποιονδήποτε συμπαγή τελεστή. Δίνουμε μια απόδειξη στην ειδική περίπτωση που ο A είναι επιπλέον φυσιολογικός.

Απόδ (i): Αν $\lambda \neq 0$ για $M_\lambda = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)$
τότε $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ και $A|_{M_\lambda} = \lambda I_{M_\lambda}$
και συμπαγής άρα I_{M_λ} συμπαγής
(αφού $\lambda \neq 0$) οπότε $\dim M_\lambda < +\infty$

Απόδ (⇒): $A \in \mathcal{B}(H)$ και αυτοσυζυγής

νδο $\sigma_p(A)$ είναι αριθμήσιμο: πεπερασμένο

ή μηδενικής ακολουθίας

αρκεί νδο: $\forall \varepsilon > 0$ $\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

ΜΕ άτοπο: αν είναι άπειρο

θα $\exists\, (\lambda_n)$ από διαφορετικά: $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ $\forall n$

$\lambda_n \in \sigma_p(A)$, A αυτοσυζυγής

έχουμε δείξει ότι αν $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$ A αυτοσ.

$\lambda \neq \mu$ τότε $M_\lambda \perp M_\mu$

οπότε $\{M_{\lambda_n}\}$ είναι $\perp$ ανά δύο

επιλέγουμε $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \in M_{\lambda_n}$, $\|x_n\| = 1$

έχω μια ON ακολουθία $\{x_n\}$ με

$A x_n = \lambda_n x_n$ $\forall n$

όμως A συμπαγής, άρα $|\langle A x_n, x_n \rangle| \longrightarrow 0$

$$\begin{gathered} | \langle A x_n, x_n \rangle | \\ \| \\ |\lambda_n| \|x_n\|^2 = |\lambda_n| \geq \varepsilon \end{gathered}$$

<u>άτοπο</u>

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Πρόταση

Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.
(i) Κάθε ιδιόχωρος του A *που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.*
(ii) Αν ο A *είναι φυσιολογικός, το σύνολο* $\sigma_p(A)$ *των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Σχόλιο Το αποτέλεσμα ισχύει για οποιονδήποτε συμπαγή τελεστή. Δίνουμε μια απόδειξη στην ειδική περίπτωση που ο A είναι επιπλέον φυσιολογικός.

Το φάσμα συμπαγούς τελεστή

Πρόταση

Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.
(i) Κάθε ιδιόχωρος του A *που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.*
(ii) Αν ο A *είναι φυσιολογικός, το σύνολο* $\sigma_p(A)$ *των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Σχόλιο Το αποτέλεσμα ισχύει για οποιονδήποτε συμπαγή τελεστή. Δίνουμε μια απόδειξη στην ειδική περίπτωση που ο A είναι επιπλέον φυσιολογικός.

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση:

Λήμμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ *φυσιολογικός τελεστής. Αν* $x \in H$ *είναι ιδιοδιάνυσμα του* A *με ιδιοτιμή* λ, *τότε* $A^*x = \bar{\lambda}x$.
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

$A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda \quad \forall \lambda \in \sigma_p(A)$

$A^*(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ που αν $x \in M_\lambda$: $A^*x = \bar{\lambda}x \in M_\lambda$

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση:

Λήμμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ *φυσιολογικός τελεστής. Αν* $x \in H$ *είναι ιδιοδιάνυσμα του* A *με ιδιοτιμή* λ*, τότε* $A^*x = \bar{\lambda}x$*.*
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση:

Λήμμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ, τότε $A^*x = \bar{\lambda}x$.
Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Θεώρημα *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(Υπενθύμιση. Ο $(\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος, αφού ο A είναι συμπαγής.)

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ (όπου $D_a = \mathrm{diag}(a(n))$ ο διαγώνιος τελεστής).

Το Φασματικό Θεώρημα

κλειστοί

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί $Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.

Απόδ. Έστω $x \in H$, θέτω $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{P_k x}_{\perp \text{ ανά δύο}}$

$$\|S_n x\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2$$

όμως: για $n > m$

$$\|S_n x - S_m x\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} P_k x\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|P_k x\|^2 =$$

$$= \|S_n(x)\|^2 - \|S_m x\|^2 \longrightarrow 0$$

άρα η $(S_n x)$ συγκλίνει, έστω σε y

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$$

όμως $\forall m$, $P_m y = \sum_k \underbrace{P_m P_k}\, x = P_m x$

διότι αφού $M_m \perp M_k$ όταν $k \neq m$

τότε $P_m P_k = 0$,,

$\forall m \quad P_m y = P_m x \iff P_m(y-x) = 0$

$\iff y - x \perp M_m \quad \forall m$

$y - x \perp \bigoplus M_m = M$

$\iff P(y-x) = 0$

$\iff Py = Px$

$y = \sum \underbrace{P_k x}_{\in M_k} \implies y \in \bigoplus M_k = M \iff P_M y = y$

[illegible] $Px = y = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$ $\blacksquare$

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί
$Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.
Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί
$Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.
Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Λήμμα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A-αναλλοίωτος υπόχωρος.
Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$.
Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^*-αναλλοίωτος.

Απόδ. $A(M) \subseteq M$ οπότε ο $B := A|_M : M \to M$, $B \in \mathcal{B}(M)$

Αν ισχύει $B^* \in \mathcal{B}(M)$ είναι $A^*|_M$ τότε $A^*(M) = B^*(M) \subseteq M$ ότι

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A^*(M) \subseteq M$

νδο $A^*|_M = B^*$. Έστω $x \in M$. νδο $B^* x = A^* x$

Αλλά από ορισμό του B^*,

$\forall y \in M$ ισχύει:

$$\langle B^*x, y\rangle_M \overset{\text{ορ}}{=} \langle x, By\rangle_M = \langle x, Ay\rangle_H \overset{\text{ορ}}{=} \langle A^*x, y\rangle$$

<u>άρα</u> $\langle B^*x - A^*x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in M$

<u>άρα</u> $B^*x - A^*x \perp M$

όμως $B^*x \in M$ και $A^*x \in M$ (από την <u>υπόθεση</u>)

$(B^*x - A^*x) \in M \cap M^{\perp}$ άρα $B^*x - A^*x = 0$

<u>άρα</u> $B^*x = A^*x \quad \forall x \in M$ ∎

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί
$Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.
Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Λήμμα

Έστω $A \in B(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A-αναλλοίωτος υπόχωρος.
Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$.
Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^*-αναλλοίωτος.

Το Φασματικό Θεώρημα

Υπενθύμιση: Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.
Αν $P_n = P(M_n)$, η προβολή $P = P(M)$ στον M ικανοποιεί $Px = \sum_n P_n x$ και $\|Px\|^2 = \sum_n \|P_n x\|^2$ για κάθε $x \in H$.
Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Λήμμα

Έστω $A \in B(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A-αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$. Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^*-αναλλοίωτος.

Παράδειγμα

Αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο τελεστής $Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ο $M = \overline{\text{span}\{e_n : n \geq 0\}}$ είναι U-αναλλοίωτος, αλλά ο $S := U|_M$ δεν ικανοποιεί $S^* = U^*|_M$, καθώς $Se_0 = 0$ ενώ $U^*e_0 = e_{-1}$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.
(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \ \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.
(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Απόδ (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $M_\lambda \perp$ ανά δύο

$\Updownarrow$

$P_\lambda P_\mu = 0$ όταν $\lambda \neq \mu$

$\{M_\lambda\}$ πλήρες στο H $\Longleftrightarrow$ $H = \bigoplus_\lambda M_\lambda$ (υπόθεση)

$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in H$ $x = \sum_\lambda P_\lambda x$

$\|x\|^2 = \sum_\lambda \|P_\lambda x\|^2$

(προκ. από την υπόθ. $\{M_\lambda\}$ ορθογώνια να ισχύει $\|x\|^2 = \sum_\lambda \|P_\lambda x\|^2$ αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_\lambda P_\lambda x = x$ για υπακολουθίες σημεία $\{\lambda_n\}$ του $\sigma_p(A)$

Όμως (A φραγμ.):

$$A(x) = \sum_\lambda AP_\lambda x \quad \text{όπου } P_\lambda x \in M_\lambda \text{ άρα } AP_\lambda x = \lambda P_\lambda x$$

$$= \sum_\lambda \lambda P_\lambda x$$

μένει να δειχθεί ότι $\sum \lambda P_\lambda$ συγκλίνει ως νόρμα του $B(H)$ (και όχι μόνο κατά σημείο)

Έστω $\{\lambda_n\}$ ακολουθία σημείων του $\sigma_p(A)$

Ξέρω ότι (λ_n) είναι μηδενική ακολουθία (αν είναι άπειρη)

όπως $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ $|\lambda_n| < \varepsilon$

$\forall x \in H,$

$$\left\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k} x \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\lambda_k} x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k} x \right\|^2$$

$$= \left\| \sum_{k>n} \lambda_k P_{\lambda_k} x \right\|^2 \le \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \underbrace{\left\| \sum_{k>n} P_{\lambda_k} x \right\|^2}_{\le \|x\|^2}$$

$\forall x, \forall n:$

$$\left\| \left(A - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{\lambda_k}\right) x \right\| \le \sup_{k>n} |\lambda_k| \quad \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\left\| A - \sum^{n} \lambda_k P_{\lambda_k} \right\| \le \sup_{k>n} |\lambda_k|$$

[illegible] $n \geq n_0$ [illegible] $\sup_{k>n} |\lambda_k| \le \epsilon$

[illegible] $\left\| A - \sum^{n} \lambda_k P_{\lambda_k} \right\| \le \epsilon$ $\boxed{\text{W}}$

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα για φυσιολογικούς συμπαγείς τελεστές - δεύτερη μορφή.)

Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι ιδιόχωροι M_λ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.

(ii) Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

(iii) Ο A είναι φυσιολογικός.

(i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) : $\underline{A = \sum_{r=1}^{\omega} \lambda_r P_{\lambda_r}}$ $\quad P_r = P_{\lambda_r}$

$$AP_k = \sum_r \lambda_r P_r P_k = \lambda_k P_k$$

$$P_k A = \sum_r \lambda_r P_k P_r = \lambda_k P_k$$

$$\Downarrow$$

$$AP_k = P_k A = \lambda_k P_k \quad \forall k \Rightarrow \underline{P_k A^* = A^* P_k} = \underline{\bar{\lambda}_k} P_k$$

$$A^*A = A^*\left(\sum_r \lambda_r P_r\right) = \sum_r \lambda_r A^* P_r = \sum_r \lambda_r \bar{\lambda}_r P_r = \sum |\lambda_r|^2 P_r$$

$$AA^* = \left(\sum \lambda_r P_r\right) A^* = \sum_r \lambda_r P_r A^* = \sum |\lambda_r|^2 P_r$$

άρα $AA^* = A^*A$ $\underline{\text{δηλ}}$ A φυσιολογικός

(iii)$\Rightarrow$(i) : Ειδικά είναι πιο συνηθισμένη περίπτωση

$\underline{A = A^*}$

Ξέρω ήδη ότι οι ιδιόχωροι είναι ανά δύο κάθετοι

άρα να δείξω ότι αθροίζουν στο H

Ξέρω επίσης ότι το $\sigma_p(A)$ αν είναι άπειρο είναι φραγμένο σύνολο μια απόδειξη: $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n\in\mathbb{N}\}$

$M_n := M_{\lambda_n}$ ανά 2 κάθετα

$H_0 = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} M_n$: ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος $\subseteq H$ που περιέχει όλα τα M_n

<u>Νδο</u> $H_0 = H$

Έστω ότι όχι. Δηλ. $M = H_0^{\perp}$ περισσότερο από 0

$A(M_n) \subseteq M_n \ \forall n \Rightarrow A(H_0) \subseteq H_0$

και άρα (αφού $A = A^*$) $A(M) \subseteq M$

γιατί αν $x\in M$ και $\forall y \in H_0$ έχω

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, \underbrace{Ay}_{\in H_0}\rangle = 0$$

άρα $Ax \perp H_0$ δηλ $Ax \in M$

Ορίζουμε $B = A|_M \in \mathcal{B}(M)$ είναι αυτοσυζυγής

γιατί $\forall x\in M$ $\langle Bx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$

και <u>συμπαγής</u> γιατί $B = A|_M$, $A\in\mathcal{K}(H)$

επίσης $B \neq 0$

Από το <u>Λήμμα</u> B <u>έχει</u> αναγκαστικά ιδιοτιμή

οπότε $\exists\lambda$ τέτοιο $\exists x\in M$, $x\neq 0$ με

$Bx = \lambda x$ άρα $Ax = Bx = \lambda x$

άρα $x \in M_\lambda \subseteq H_0 = M^{\perp}$

$x \in M \cap M^{\perp}$ άρα $x = 0$ άτοπο

άρα $H_0 = H$ ▨

Γενική περίπτωση: $AA^* = A^*A$ και συμπαγής

Θέτω: $T = A^*A$ αυτοσυζυγής και συμπαγής

από τη ειδική περίπτωση, οι ιδιόχωροι του $M_\mu(T)$

είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H

$$H = \bigoplus_{\mu \in \sigma_p(T)} M_\mu(T)$$

Τώρα κάθε $M_\mu(T)$ είναι αναλλοίωτο από κάθε τελεστή $B \in B(H)$ που μετατίθεται με τον T!

(αν $x \in M_\mu(T)$ τότε $Tx - \mu x = 0$

και $Bx = \mu Bx$ δηλ.

$$(T - \mu I)Bx = B(T - \mu I)x = 0 \;)$$

αλλά A, και ο A^* μετατίθενται με τον $T = A^*A$

$$AT = AA^*A = (AA^*)A = (A^*A)A = TA$$

$$A^*T = A^*(A^*A) = A^*(AA^*) = (A^*A)A^* = TA^*$$

$A(M_\mu(T)) \subseteq M_\mu(T)$

$A^*(M_\mu(T)) \subseteq M_\mu(T)$

Θέτω $C_\mu = A\big|_{M_\mu(T)} \in \mathcal{B}(M_\mu(T))$

Άρα το λήμμα $C_\mu^* = A^*\big|_{M_\mu(T)}$ γιατί $A^*(M_\mu(T)) \subseteq M_\mu(T)$

άρα C_μ είναι φυσιολογικός

Αφού

$(\forall x \in M_\mu(T) : \underline{\|C_\mu^* x\|} = \|A^* x\| = \|Ax\|$

$= \underline{\|C_\mu x\|} \quad \forall x \in M_\mu(T)$

$\Downarrow$ άρα

C_μ φυσιολ.)

$\forall \mu \in \sigma_p(T)$ έχω $C_\mu \in \mathcal{B}(\underline{M_\mu(T)})$ $\underline{\text{φυσιολογικός}}$

- Αν $\mu = 0$: $M_0(T) = \ker T = \ker(A^*A) = \ker A$
- Αν $\mu \neq 0$: $M_\mu(T)$ έχει πεπερ. διάσταση $(T \in \mathcal{K}(H))$

οπότε ο C_μ διαγωνιοποιείται

$\exists$ ορθ. βάση $B_\mu = \{e_\mu^1, e_\mu^2, \dots, e_\mu^{n_\mu}\}$ του $M_\mu(T)$

ως προς την οποία ο $C_\mu = A\big|_{M_\mu(T)}$

διαγωνοποιείται.

Θέτω $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_\mu : \mu \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}\}$ (ορθοκανονικό σύνολο)

Είναι ορθοκανονική βάση του

$$\bigoplus\{M_\mu(T) : \mu \in \sigma_p(T)\setminus\{0\}\} := H_0$$

ως προς την οποία ο A διαγωνοποιείται.

Όμως
$$\bigoplus_{\mu \in \sigma_p(T)} M_\mu(T) = H$$
$$= \bigoplus_{\mu \neq 0} M_\mu(T) \oplus M_0$$

$$H = H_0 \oplus \underset{\ker(T) = \ker A}{\underset{\shortparallel}{M_0}}$$

οπότε $H_0 = (\ker A)^\perp$ και δείξαμε ότι ο $A|_{(\ker A)^\perp}$ διαγωνοποιείται $\blacksquare$

Το Φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή)

Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία (x_n) ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(a(n))$ ώστε

$$\lim_{N\to\infty}\left\|A-\sum_{n=1}^{N}a(n)P[x_n]\right\|=0 \qquad (\star)$$

(όπου $P[x_n] = x_n x_n^*$ η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το x_n). Τότε η ακολουθία $(a(n))$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Απόδ. Αν $(\star)$: $A = \| \|\text{-}\lim \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a(n)P[x_n]}_{\text{πεπερ. τάξης}} \Rightarrow A$ συμπ.

$\Rightarrow A$ φυσιολ.

επειδή $\forall m$, $Ax_m = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) P_n x_m = a(m) x_m$ φυσιολ.

$$A = \sum a(n) P[x_n] \quad \perp \text{ ανά δύο}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall x, \quad \|Ax\|^2 = \sum \|a_n P[x_n] x\|^2 = \sum_n |a_n|^2 |\langle x, x_n \rangle|^2 < \infty$$

$$\Downarrow$$

$$a(n) \longrightarrow 0$$

Αντίστροφα, υποθέτω ότι A συμπαγής + αυτοσυζυγής.

Από το προηγούμενο, ο A διαγωνοποιείται στο $(\ker A)^\perp$

δηλ. $\exists$ μια ON βάση $\{x_n\}$ του $(\ker A)^\perp$ και $a(n) \in \mathbb{C}$ ώστε

$$A x_n = a(n) x_n \quad \forall n$$

$\forall x \in H$, γράφω: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n + x'$ όπου $x' \perp \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ δηλ. $x' \in \ker A$

$$\Downarrow$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle A x_n + A x' = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle a(n) x_n + 0$$

επειδή ξέρω ότι τα $\{x_n\}$ είναι άπειρα, η $(a(n))$ είναι μηδενική ακολ.

$$\|Ax - \sum_{n=1}^{m} a(n)\langle x, x_n\rangle x_n\| \le \sup_{n>m} |a(n)|\, \|x\|$$

άρα $\quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, x_n x_n^*$

συμπαγής $\Longrightarrow$ $a(n) \longrightarrow 0$, $n \to \infty$

- A φυσ + συμπ $\Longleftrightarrow$ $\{M_\lambda\}$ $\perp$ ανά δύο και πεπερασμ.

  $\Longleftrightarrow$ $\{P_\lambda\}$ $\perp$ – – – και

  $\forall x$: $x = \sum P_\lambda x$

  και $\quad A = \sum \lambda P_\lambda$

- A φυσ + συμπ $\Longleftrightarrow$ $\exists$ ορθοκανονική $\{x_n\}$ και

  μ.ε. $\{a(n)\}$ μηδενική &

  ορθοκανονική ακολουθία ώστε

  και $\quad A = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, x_n x_n^*$

  συγκλίνει ως $\|\ \|$ στο $B(H)$.

Το Φασματικό Θεώρημα

Πόρισμα

Έστω A *συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert* H*. Τότε*

$$
\begin{aligned}
&(i) \qquad \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}\\
&(ii) \qquad \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\}
\end{aligned}
$$

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } \; x \in H \, .$$

Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert

Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H\,.$$

Θεώρημα

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες $\{x_n\}$ στον K και $\{y_n\}$ στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $\{\lambda(n)\}$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i) x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$.

Το Θεώρημα αυτό είναι συνέπεια του Φασματικού Θεωρήματος και της πολικής αναπαράστασης τελεστή.