Τριγωνοποιήσιμοι τελεστές

Κάθε τελεστής σε μιγαδικό χώρο Hilbert πεπερασμένης διάστασης έχει ιδιοδιανύσματα, αφού έχει ιδιοτιμές (θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας). Δεν έχει όμως πάντα ορθοκανονική βάση του χώρου που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα: αν έχει, τότε θα είναι φυσιολογικός.

Επομένως μόνον οι φυσιολογικοί τελεστές διαγωνοποιούνται ως προς ορθοκανονικές βάσεις.

Το καλύτερο που μπορεί να πετύχει κανείς για αυθαίρετους τελεστές είναι η άνω τριγωνική μορφή:

Πρόταση 1 *Αν H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ έχει μια μεγιστική αλυσίδα από αναλλοίωτους υποχώρους: Υπάρχουν υπόχωροι*

$$\{0\} \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq H$$

ώστε $T(M_k) \subseteq M_k$ *και* $\dim M_k = k$ *για κάθε* $k = 1, \ldots, n-1$.

Συνεπώς υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του H ως προς την οποία ο πίνακας του T είναι άνω τριγωνικός, και άρα τα διαγώνια στοιχεία του, $\langle Tx_k, x_k\rangle$, $k = 1, \ldots, n$, είναι οι ιδιοτιμές του T.

Απόδειξη Με επαγωγή στη διάσταση n του χώρου. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι κάθε τελεστής σε χώρο διάστασης ως $n-1$ έχει μια μεγιστική αλυσίδα από αναλλοίωτους υποχώρους, και θεωρούμε έναν $T \in \mathcal{B}(H)$ όπου ο H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert και έχει διάσταση n.

Ο τελεστής T^* δρα σε μιγαδικό χώρο πεπερασμένης διάστασης, συνεπώς έχει ένα ιδιοδιάνυσμα $x \in H$. Ο χώρος $\text{span}(x)$ είναι T^*-αναλλοίωτος, επομένως ο $(\text{span}(x))^\perp$ είναι T-αναλλοίωτος και έχει διάσταση $n-1$. Συμβολίζουμε τον $(\text{span}(x))^\perp$ με M_{n-1}.

Από την επαγωγική υπόθεση, για τον τελεστή $T' := T_{M_{n-1}} \in \mathcal{B}(M_{n-1})$ υπάρχει μια αλυσίδα

$$\{0\} \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-2}$$

από T'-αναλλοίωτους υποχώρους του M_{n-1} με $\dim M_k = k, k = 1, \ldots, n-2$.

Βεβαίως οι M_k $(k \leq n-2)$ είναι T-αναλλοίωτοι, οπότε βρήκαμε μια μεγιστική αλυσίδα

$$\{0\} \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq H$$

από T-αναλλοίωτους υποχώρους, όπως θέλαμε.

Ο χώρος M_1 είναι μονοδιάστατος. Επιλέγουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x_1 \in M_1$.

Ο χώρος M_2 έχει διάσταση 2, και περιέχει τον M_1, άρα το x_1. Επιλέγω ένα μοναδιαίο $x_2 \in M_2$ με $x_2 \perp M_1$. Συνεχίζοντας έτσι, μετά από $n-2$ βήματα έχω βρει μοναδιαία διανύσματα $x_k \in M_k$ με $x_k \perp M_{k-1}$ για $k = 1, \ldots, n$, τα οποία επομένως είναι ορθοκανονικά και παράγουν τον H.

Εξετάζουμε τον πίνακα $[a_{ij}]$ του T ως προς αυτήν την ορθοκανονική βάση: έχουμε $a_{ij} = \langle Tx_j, x_i\rangle$. Για κάθε j έχουμε $x_j \in M_j$ άρα $Tx_j \in M_j$ και συνεπώς, αν $i > j$ θα πρέπει $x_i \perp Tx_j$ (αφού $x_i \perp M_j$), άρα $a_{ij} = \langle Tx_j, x_i\rangle = 0$.

Δηλαδή ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι άνω τριγωνικός.

Έπεται λοιπόν ότι τα διαγώνια στοιχεία a_{kk} του πίνακα είναι ιδιοτιμές του T (όχι κατ' ανάγκη διακεκριμένες) και δεν υπάρχουν άλλες, γιατί

$$\det[a_{ij} - \lambda\delta_{ij}] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists i : a_{ii} - \lambda = 0$$

εφόσον ο πίνακας $[a_{ij} - \lambda\delta_{ij}]$ είναι άνω τριγωνικός. $\square$

Σχόλια Αντίστοιχο αποτέλεσμα για απειροδιάστατους χώρους δεν υπάρχει (μέχρι στιγμής...), καθώς δεν είναι γνωστό αν κάθε τελεστής σε απειροδιάστατο διαχωρίσιμο χώρο Hilbert έχει έστω κι έναν μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο.

Είναι όμως γνωστό ότι κάθε *συμπαγής* τελεστής σε χώρο Banach έχει μη τετριμμένο κλειστό αναλλοίωτο υπόχωρο. Μιά εφαρμογή του Λήμματος Zorn δείχνει ότι κάθε *συμπαγής* τελεστής σε χώρο Hilbert έχει μια μεγιστική αλυσίδα από κλειστούς αναλλοίωτους υποχώρους.

Όμως μια τέτοια αλυσίδα δεν έχει κατ' ανάγκην «διάκενα» όπως στην περίπτωση χώρων πεπερασμένης διάστασης που είδαμε παραπάνω. Για παράδειγμα, στον χώρο $L^2([0,1])$, η αλυσίδα $\mathcal{N} := \{N_t : t \in [0,1]\}$ όπου

$$N_t := \{f \in L^2([0,1]) : f(s) = 0 \text{ σχεδόν για κάθε } s > t\}$$

είναι μεγιστική αλυσίδα κλειστών υποχώρων του $L^2([0,1])$, αλλά δεν έχει «διάκενα»: για κάθε $t < s$ στο $[0,1]$, ανάμεσα στους N_t και N_s υπάρχουν πάντα διαφορετικά στοιχεία της αλυσίδας, μάλιστα άπειρα: όλοι οι υπόχωροι N_r, για $r \in (t,s)$.

Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι η αλυσίδα $\mathcal{N}$ αποτελεί το σύνολο όλων των κλειστών αναλλοίωτων υπόχωρων του τελεστή Volterra $V \in \mathcal{B}(L^2([0,1])$ που ορίζεται ως εξής:

$$(Vf)(t) = \int_t^1 f(s)ds, \qquad t \in [0,1],\ f \in L^2([0,1])\,.$$

Βιβλιογραφία K.R. Davidson, Nest Algebras,
Pitman Research Notes in Mathematics Series vol. 191, Longman (1988)
`http://www.math.uwaterloo.ca/~krdavids/Preprints/DavidsonNest_Algebras.pdf`