Το φασματικό Θεώρημα

1 Το φάσμα ενός τελεστή

Υπενθύμιση:

Λήμμα 1.1 *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής. Αν $x \in H$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή λ, τότε $A^*x = \bar{\lambda}x$.*

Έπεται ότι οι ιδιόχωροι ενός φυσιολογικού τελεστή (αν υπάρχουν) τον ανάγουν, και είναι κάθετοι μεταξύ τους.

Ορισμός 1.1 *Το **φάσμα** ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach E είναι το σύνολο*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Παρατήρηση. Αποδεικνύεται ότι το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές και μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Εδώ, θα το δείξουμε για αυτοσυζυγείς τελεστές (Πρόταση 1.3).

Δεν είναι όμως αλήθεια το σημειακό φάσμα $\sigma_p(A)$ (δηλ. το σύνολο των ιδιοτιμών) είναι πάντα μη κενό. Δεν ισχύει δηλαδή ότι κάθε τελεστής, έστω και αυτοσυζυγής, έχει ιδιοτιμές.
Παράδειγμα ο $A \in \mathcal{B}(L^2([0,1],\lambda))$ (λ το μέτρο Lebesgue) με $(Af)(s) = sf(s)$ για $f \in L^2([0,1],\lambda)$. [*Άσκηση!*]

Επίσης δεν είναι αλήθεια ότι κάθε συμπαγής τελεστής έχει ιδιοτιμές.
Παράδειγμα ο $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ με $Te_n = \frac{1}{n}e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έπεται από την Πρόταση 1.3 ότι κάθε συμπαγής *και* αυτοσυζυγής τελεστής έχει ιδιοτιμές, αφού κάθε μη μηδενικό στοιχείο του φάσματος ενός συμπαγούς τελεστή είναι ιδιοτιμή.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι *ιδιοτιμή* ενός τελεστή $A \in \mathcal{B}(E)$ (συμβ. $\lambda \in \sigma_p(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει $x \in E$, $x \neq 0$ ώστε $(A - \lambda I)x = 0$.

Ορισμός 1.2 *Το λ είναι* προσεγγιστική ιδιοτιμή *του A (συμβ. $\lambda \in \sigma_a(A)$) αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στον E με $\|x_n\| = 1$ ώστε $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$.*

Ισοδύναμα, $\lambda \notin \sigma_a(A)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|(A - \lambda I)x\| \geq \delta \|x\|$ για κάθε $x \in E$.

Προφανώς

$$\sigma_p(A) \subseteq \sigma_a(A) \subseteq \sigma(A)\,.$$

Πρόταση 1.2 *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ φυσιολογικός τελεστής (όπου H χώρος Hilbert). Τότε $\sigma(A) = \sigma_a(A)$. Δηλαδή, αν το λ δεν είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, τότε ο $A - \lambda I$ έχει (φραγμ.) αντίστροφο.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Θα δείξω ότι ο τελεστής $T := A - \lambda I$ έχει φραγμένο αντίστροφο. Ο T είναι 1-1, άρα ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση: $S : T(H) \to H$ που είναι γραμμική. Είναι όμως και φραγμένη. Πράγματι: Αφού $\lambda \notin \sigma_a(A)$, ο $T = A - \lambda I$ είναι "κάτω φραγμένος", δηλ. υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|Tx\| \geq \delta\|x\|$ για κάθε $x \in H$. Επομένως, για κάθε $y = Tx \in T(H)$ έχουμε

$$\|Sy\| = \|S(Tx)\| = \|x\| \leq \frac{1}{\delta}\|Tx\| = \frac{1}{\delta}\|y\|$$

δηλαδή $\|S\| \leq \frac{1}{\delta}$. Επομένως ο S επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\tilde{S} : \overline{T(H)} \to H$ που ικανοποιεί $\tilde{S}Tx = STx = x$ για κάθε $x \in H$ και $T\tilde{S}y = y$ για κάθε $y \in T(H)$ άρα (λόγω συνέχειας) και για κάθε $y \in \overline{T(H)}$.

Όμως, $\overline{T(H)} = H$. Πράγματι, αν $x \perp T(H)$, τότε για κάθε $z \in H$ έχουμε $\langle T^*x, z\rangle = \langle x, Tz\rangle = 0$, άρα $T^*x = 0$. Επειδή ο T είναι φυσιολογικός, έχουμε $\|T^*x\| = \|Tx\| \geq \delta\|x\|$, και συνεπώς $x = 0$.

Τελικά λοιπόν ορίζεται φραγμένος τελεστής $\tilde{S} : H \to H$ που ικανοποιεί $\tilde{S}Tx = STx = x$ και $T\tilde{S}y = y$ για κάθε $x, y \in H$, δηλαδή $\tilde{S} = T^{-1}$. □

Πρόταση 1.3 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε*

(α) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
(β) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.
(γ) $\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_a(A)\}$.
Ειδικότερα, το φάσμα ενός αυτοσυζυγούς τελεστή δεν είναι κενό.

Απόδειξη. (α) Αν $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, τότε, για κάθε $x \in H\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}0 < |\lambda - \bar{\lambda}|.\|x\|^2 &= |\langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle (A-\bar{\lambda} I)x, x\rangle| \\ &= |\langle (A-\lambda I)x, x\rangle - \langle x, (A-\lambda I)x\rangle| \leq 2\|(A-\lambda I)x\|\|x\|\end{aligned}$$

οπότε
$$\|(A-\lambda I)x\| \geq \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|}{2}\|x\|.$$

Επομένως $\lambda \notin \sigma_a(A)$. Αλλά $\sigma_a(A) = \sigma(A)$ διότι ο A είναι φυσιολογικός, άρα $\lambda \notin \sigma(A)$.

(β) Αν $\phi(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ και $\hat{\phi}(x) = \langle Ax, x\rangle$, γράφοντας $\|\hat{\phi}\| = \sup\{|\hat{\phi}(x)| : \|x\| = 1\}$, αρκεί να δείξουμε ότι $|\phi(x,y)| \leq \|\hat{\phi}\|$ για κάθε $x, y \in H$ με $\|x\| \leq 1$ και $\|y\| \leq 1$. Παρατηρούμε ότι από την υπόθεση έπεται ότι $\hat{\phi}(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in H$. Επομένως, επειδή

$$4\phi(x,y) = \hat{\phi}(x+y) - \hat{\phi}(x-y) + i(\hat{\phi}(x+iy) - i\hat{\phi}(x-iy)),$$

έχουμε
$$4\operatorname{Re}\phi(x,y) = \hat{\phi}(x+y) - \hat{\phi}(x-y)$$

άρα [1]
$$4|\operatorname{Re}\phi(x,y)| \leq \|\hat{\phi}\|.(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2\|\hat{\phi}\|.(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (*)$$

από τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν τώρα γράψουμε $\phi(x,y) = \lambda|\phi(x,y)|$ όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ (οπότε $|\lambda| = 1$), έχουμε $|\phi(x,y)| = \bar{\lambda}\phi(x,y) = \phi(x, \lambda y)$ άρα $\phi(x,\lambda y) \in \mathbb{R}$, οπότε από την (*) έχουμε

$$|\phi(x,y)| = \phi(x,\lambda y) \leq \|\hat{\phi}\|\frac{\|x\|^2 + \|\lambda y\|^2}{2} \leq \|\hat{\phi}\|,$$

αφού $\|x\| \leq 1$ και $\|\lambda y\| \leq 1$.

(γ) Από το (β), υπάρχει μια ακολουθία (x_n) με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to \|A\|$. Η ακολουθία πραγματικών (γιατί $A = A^*$) αριθμών $(\langle Ax_n, x_n\rangle)$ είναι φραγμένη, επομένως έχει μια υπακολουθία $(\langle Ay_n, y_n\rangle)$ που συγκλίνει, έστω στο $\lambda \in \mathbb{R}$, και προφανώς $|\lambda| = \|A\|$.
Θα δείξουμε ότι το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του A. Έχουμε

$$\begin{aligned}0 \leq \|Ay_n - \lambda y_n\|^2 &= \langle Ay_n, Ay_n\rangle - \langle Ay_n, \lambda y_n\rangle - \langle \lambda y_n, Ay_n\rangle + \langle \lambda y_n, \lambda y_n\rangle \\ &= \|Ay_n\|^2 - 2\lambda\langle Ay_n, y_n\rangle + \lambda^2\|y_n\|^2 \qquad (\text{γιατί } A = A^* \text{ και } \lambda = \bar{\lambda}) \\ &\leq \|A\|^2 - 2\lambda\langle Ay_n, y_n\rangle + \lambda^2 = 2\lambda(\lambda - \langle Ay_n, y_n\rangle) \to 0\end{aligned}$$

επομένως $\lim_n (A - \lambda I)y_n = 0$. □

Παρατήρηση Μια διαφορετική απόδειξη του (γ), που αποφεύγει το (β), μπορεί κανείς να βρει στην “Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών”, Πρόταση 6.1.17.

[1] χρησιμοποιώντας ότι $|\hat{\phi}(\frac{x}{\|x\|})| \leq \|\hat{\phi}\|$ για κάθε $x \neq 0$ και άρα $|\hat{\phi}(x)| \leq \|\hat{\phi}\|\,\|x\|^2$

Πόρισμα 1.4 *Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και $A = A^*$, τότε υπάρχει $\lambda \in \sigma_p(A)$ με $|\lambda| = \|A\|$.*

Απόδειξη. Αφού ο A είναι αυτοσυζυγής, έχει μια προσεγγιστική ιδιοτιμή λ με $|\lambda| = \|A\|$. Αφού είναι συμπαγής, το λ είναι ιδιοτιμή. □

Παρατήρηση 1.5 *Υπάρχει λοιπόν ένα διάνυσμα $x \in H$ που «μεγιστοποιεί» τον A, με την έννοια ότι // $\|Ax\| = \|A\|\|x\|$. Μάλιστα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A με ιδιοτιμή $\|A\|$ ή $-\|A\|$.*

Παράδειγμα 1.6 *Αν $A \in \mathcal{K}(H)$, το 0 δεν είναι πάντα ιδιοτιμή: παράδειγμα ο $D_a : e_n \to \frac{1}{n}e_n$ στον ℓ^2.*

Παρατήρηση. Αν $A \in \mathcal{K}(H)$ και ο χώρος H είναι απειροδιάστατος, τότε $0 \in \sigma(A)$. Γιατί αλλιώς, ο A θα είχε φραγμένο αντίστροφο A^{-1}, οπότε ο $I = AA^{-1}$ θα ήταν συμπαγής, πράγμα που δεν συμβαίνει σε απειροδιάστατους χώρους.

Πρόταση 1.7 *Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$.*

(i) *Κάθε ιδιόχωρος του A που αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή έχει πεπερασμένη διάσταση.*

(ii) *Αν ο A είναι φυσιολογικός, το σύνολο $\sigma_p(A)$ των ιδιοτιμών του ή είναι πεπερασμένο, ή αποτελεί μηδενική ακολουθία.*

Σχόλιο Το αποτέλεσμα ισχύει για οποιονδήποτε συμπαγή τελεστή, όπως έχουμε δείξει (δες το `fredh21.pdf`). Δίνουμε μια πιο σύντομη απόδειξη στην ειδική περίπτωση που ο A είναι επιπλέον φσυιολογικός.

Απόδειξη. (i) Αν $\lambda \in \sigma_p(A)$, τότε $A(M_\lambda) \subseteq M_\lambda$ και $A|_{M_\lambda} = \lambda I|_{M_\lambda}$.

Επομένως, αν $\lambda \neq 0$, ο ταυτοτικός τελεστής στον χώρο Hilbert M_λ είναι συμπαγής, άρα ο M_λ έχει πεπερασμένη διάσταση.

(ii) Αν υποθέσουμε ότι το $\sigma_p(A)$ είναι άπειρο και δεν αποτελεί μηδενική ακολουθία, θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ ώστε το σύνολο $\{\lambda \in \sigma_p(A) : |\lambda| \geq \delta\}$ να είναι άπειρο. Θα υπάρχει λοιπόν μια άπειρη ακολουθία (λ_n) διακεκριμένων ιδιοτιμών ώστε $|\lambda_n| \geq \delta$ για κάθε n. Αν x_n είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$, η ακολουθία (x_n) είναι ορθοκανονική, γιατί οι ιδιόχωροι του A είναι ανά δυο κάθετοι αφού ο A είναι φυσιολογικός (Λήμμα 1.1). Αφού ο A είναι συμπαγής, έχουμε $\langle Ax_n, x_n\rangle \to 0$. Όμως $|\langle Ax_n, x_n\rangle| = |\lambda_n| \geq \delta$ για κάθε n, άτοπο. □

Παρατήρηση Ο μηδενοχώρος $\ker A$ (δηλαδή ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0) μπορεί να έχει οποιαδήποτε διάσταση:

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τον τελεστή D_a στον ℓ^2 με $D_a e_n = a(n)e_n$ όπου η $a = (a(n))$ είναι μηδενική ακολουθία. Ο D_a είναι συμπαγής φυσιολογικός και $\sigma_p(D_a) = \{a(n) : n \in \mathbb{N}\}$. (*Άσκηση*)

Αν λοιπόν $a(n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\ker D_a = \{0\}$. Αν $a(n) = 0$ για πεπερασμένο πλήθος δεικτών n, τότε ο $\ker D_a$ έχει πεπερασμένη διάσταση, και αν $a(n) = 0$ για άπειρο πλήθος δεικτών n, τότε ο $\ker D_a$ είναι απειροδιάστατος.

2 Το φασματικό Θεώρημα

Θεώρημα 2.1 *Αν H είναι χώρος Hilbert, κάθε συμπαγής φυσιολογικός τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιείται στον υπόχωρο $(\ker A)^\perp$.*

Υπάρχουν δηλαδή $a(n) \in \mathbb{C}$ και ορθοκανονική βάση $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker A)^\perp$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, αν $U : (\ker A)^\perp \to \ell^2$ είναι ο unitary τελεστής που ικανοποιεί $U(x_n) = e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $UAU^{-1} = D_a$ ((όπου $D_a = \mathrm{diag}(a(n)$ ο διαγώνιος τελεστής).

Το Θεώρημα έπεται άμεσα από το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.2 *Αν A είναι συμπαγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Οι ιδιόχωροι $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι κάθετοι ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και παράγουν τον H.*

(ii) *Οι αντίστοιχες προβολές P_λ είναι κάθετες ανά δύο, έχουν αριθμήσιμο πλήθος και για κάθε αρίθμηση $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\sigma_p(A)$, αν $P_n = P_{\lambda_n}$ ισχύει*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n x = x \text{ για κάθε } x \in H \text{ και } \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$$

όπου η δεύτερη σειρά συγκλίνει ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

(iii) *Ο A είναι φυσιολογικός.*

Υπενθύμιση: *Έστω $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ κάθετοι ανά δύο υπόχωροι ενός χώρου Hilbert H και $M := \oplus_n M_n$ το ευθύ τους άθροισμα, δηλ. ο μικρότερος* κλειστός *υπόχωρος που περιέχει κάθε M_n.*
Αν $P_n = P(M_n)$ και $P = P(M)$, τότε για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum\limits_n P_n x$ συγκλίνει στο Px και $\|Px\|^2 = \sum\limits_n \|P_n x\|^2$.

Επομένως αν κάθε M_n έχει μια ορθοκανονική βάση $\{e_{i,n} : i \in I_n\}$, η ένωση $\bigcup_n \{e_{i,n} : i \in I_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του M.

Απόδειξη του Θεωρήματος $(i) \iff (ii)$ Από την υπενθύμιση είναι φανερό ότι οι ιδιόχωροι είναι κάθετοι ανά δύο και παράγουν τον H (δηλ. το ευθύ τους άθροισμα είναι ο H) αν και μόνον αν οι προβολές είναι κάθετες ανά δύο και το άθροισμά τους συγκλίνει κατά σημείο στον ταυτοτικό τελεστή.

Μένει να δείξουμε ότι, αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n x = x$ για κάθε $x \in H$, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ συγκλίνει στον A ως προς την νόρμα του $\mathcal{B}(H)$.

Έστω $x \in H$. Από τη σχέση $x = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} P_n x$ συμπεραίνουμε (αφού ο A είναι γραμμικός και συνεχής) ότι $Ax = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} AP_n x$. Όμως το $P_n x$ ανήκει στον ιδιόχωρο M_{λ_n} και άρα $AP_n x = \lambda_n P_n x$, οπότε έχουμε $Ax = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n x$ (σύγκλιση κατά σημείο). Όμως, επειδή ο A είναι συμπαγής, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$συγκλίνει ως προς τη νόρμα τελεστή:

Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Αφού η ακολουθία (λ_n) είναι μηδενική (Πρόταση 1.7) υπάρχει n_0 ώστε $|\lambda_n| < \epsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς, αν $n \geq n_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k x \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k P_k x \right\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\lambda_k P_k x\|^2 \quad \text{γιατί τα } P_k x \text{ είναι κάθετα ανά δύο} \\
&\leq \epsilon^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \quad \text{γιατί } |\lambda_k| < \epsilon \text{ όταν } k \geq n_0 \\
&\leq \epsilon^2 \|x\|^2 \qquad \text{αφού} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \mid \leq \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

Επομένως δείξαμε ότι $\left\| A - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \right\| \leq \epsilon$ αν $n \geq n_0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Η σχέση $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ δίνει $AP_n = P_n A = \lambda_n P_n$ (αφού $P_n P_k = 0$ όταν $k \neq n$) άρα $P_n A^* = A^* P_n = \bar{\lambda}_n P_n$ και επομένως,

$$A^*A = A^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A^* P_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_n P_n \quad \text{και} \quad AA^* = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n\right) A^* = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \bar{\lambda}_n P_n$$

άρα $AA^* = A^*A$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ (*Αυτό είναι το ουσιαστικό περιεχόμενο του Θεωρήματος.*)
Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο A είναι αυτοσυζυγής.

Από την Πρόταση 1.3, το σύνολο $\{M_\lambda : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι μη κενό. Από το Λήμμα 1.1, οι ιδιόχωροι του A είναι ανά δύο κάθετοι και αναλλοίωτοι από τον A. Πρέπει να δείξουμε ότι παράγουν τον H.

Ονομάζουμε M τον μικρότερο κλειστό υπόχωρο που περιέχει όλους τους M_λ (δηλαδή $M = \oplus_\lambda M_\lambda$). Το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι $M = H$, δηλαδή ότι $M^\perp = \{0\}$.

Έστω ότι $M^\perp \neq \{0\}$. Επειδή κάθε M_λ είναι αναλλοίωτος από τον A, το ίδιο ισχύει [2] και για τον M. Αλλά ο A είναι αυτοσυζυγής, άρα αφήνει αναλλοίωτο και τον $M^\perp$.

Επομένως ο περιορισμός $B := A|_{M^\perp}$ ορίζει έναν τελεστή $B : M^\perp \to M^\perp$. Παρατηρούμε ότι ο $B \in \mathcal{B}(M^\perp)$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής (γιατί;). Επίσης, $B \neq 0$, μάλιστα, ο B είναι 1-1, αφού $\ker A \subseteq M$.

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 1.3, ο B θα έπρεπε να έχει ιδιοτιμές. Όμως, αν $Bx = \lambda x$ όπου $x \in M^\perp \setminus \{0\}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $Ax = Bx = \lambda x$, άρα το x είναι ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ (του A), επομένως $x \in M_\lambda \subseteq M$. Δηλαδή $x \in M \cap M^\perp$, άρα $x = 0$, άτοπο.

(β) Γενική περίπτωση.

Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$ φυσιολογικός. Θεωρούμε τον αυτοσυζυγή συμπαγή τελεστή $T := A^*A$. Από την περίπτωση (α) οι ιδιόχωροι $\{M_\mu(T),\ \mu \in \sigma_p(T)\}$ του T είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον H.

Παρατηρούμε ότι κάθε ιδιόχωρος $M_\mu(T)$ είναι αναλλοίωτος από τον A και από τον A^*. Πράγματι, επειδή $A^*A = AA^*$, έχουμε

$$AT = A(A^*A) = (AA^*)A = (A^*A)A = TA \quad \text{και} \quad A^*T = A^*(A^*A) = A^*(AA^*) = (A^*A)A^* = TA^*.$$

Δηλαδή οι A και A^* μετατίθενται με τον $T = A^*A$, άρα αφήνουν τον $M_\mu(T) = \ker(T - \mu I)$ αναλλοίωτο. Επομένως για κάθε $\mu \in \sigma_p(T)$ ο τελεστής $C_\mu := A|_{M_\mu(T)}$ απεικονίζει τον $M_\mu(T)$ στον εαυτό του, δηλαδή $C_\mu \in \mathcal{B}(M_\mu(T))$. Ισχύει όμως ότι $C_\mu^* = A^*|_{M_\mu(T)}$ (δες το Λήμμα 2.3 αμέσως μετά). Έπεται ότι $C_\mu^* C_\mu = C_\mu C_\mu^*$, γιατί $A^*A = AA^*$, άρα ο C_μ είναι φυσιολογικός τελεστής στον $M_\mu(T)$.

Αν $\mu = 0$, ο ιδιόχωρος $M_0(T) = \ker A^*A$ είναι ο πυρήνας $\ker A = M_0(A)$ του A (αποδ.: αν $x \in \ker A^*A$ τότε $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0$ άρα $x \in \ker A$ και το αντίστροφο είναι προφανές).

Αν $\mu \neq 0$, ο αντίστοιχος ιδιόχωρος $M_\mu(T)$ έχει πεπερασμένη διάσταση (Πρόταση 1.7). Ο C_μ είναι λοιπόν φυσιολογικός τελεστής σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης. Επομένως υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $M_\mu(T)$ από ιδιοδιανύσματα του C_μ (από το Φασματικό Θεώρημα σε χώρους πεπερασμένης διάστασης). Δηλαδή για κάθε $\mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$, ο περιορισμός C_μ του A στον $M_\mu(T)$ διαγωνοποιείται ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\mathcal{B}_\mu = \{e_n^\mu, n = 1, \ldots, n_\mu\}$. Άρα, η (αριθμήσιμη) ένωση των $\mathcal{B}_\mu$, $\mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ είναι ορθοκανονική βάση του A-αναλλοίωτου υποχώρου

$$N := \overline{\text{span}\{M_\mu(T) : \mu \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}\}}$$

η οποία αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A. Οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι του A παράγουν τον χώρο N, άρα, μαζί με τον $\ker A = M_0(A)$, παράγουν τον χώρο H. □

(γ) Δεύτερη απόδειξη του (β).

[2]Πράγματι, κάθε $x \in M$ γράφεται $x = \sum_\lambda P_\lambda x$ άρα $Ax = \sum_\lambda AP_\lambda x$ (συνέχεια του A). Όμως, κάθε $AP_\lambda x$ ανήκει στον M_λ, άρα στον M, οπότε $Ax \in M$.

Έστω $A \in \mathcal{K}(H)$ φυσιολογικός. Ορίζουμε $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ και $D = \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Οι B και D είναι αυτοσυζυγείς και $A = B + iD$. Επιπλέον, επειδή ο A είναι φυσιολογικός, οι B και D *μετατίθενται:* αφού $AA^* = A^*A$, έχουμε $(A + A^*)(A - A^*) = (A - A^*)(A + A^*)$.

Επίσης, οι B και D μηδενίζονται στον $\ker A$: αν $Ax = 0$ τότε $A^*x = 0$ αφού ο A είναι φυσιολογικός, και συνεπώς $Bx = 0$ και $Dx = 0$.

Ο χώρος $N = (\ker A)^\perp$ είναι διαχωρίσιμος αφού ο A είναι συμπαγής και οι τελεστές $B_N := B|_N$ και $D_N := D|_N$ αφήνουν τον N αναλλοίωτο και είναι αυτοσυζυγείς και συμπαγείς τελεστές που μετατίθενται. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ιδιόχωρος $M_\mu(B_N)$ του B_N είναι και D_N-αναλλοίωτος.

Από την περίπτωση (α) οι ιδιόχωροι $\{M_\mu(B_N),\ \mu \in \sigma_p(B_N)\}$ του B_N είναι ανά δύο κάθετοι και παράγουν τον N.

Τώρα όμως, για κάθε $\mu \in \sigma_p(B_N)$, ο $M_\mu(B_N)$ είναι D_N-αναλλοίωτος και ο περιορισμός D_μ του D_N στο $M_\mu(B_N)$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής τελεστής (όπως φαίνεται αμέσως από τους ορισμούς). Κατά συνέπεια, πάλι από την περίπτωση (α), υπάρχει κάποια ορθοκανονική βάση $\mathcal{E}_\mu = \{e_n^\mu, n = 1, \dots, \}$ του (διαχωρίσιμου) χώρου $M_\mu(B_N)$ η οποία διαγωνοποιεί τον D_μ, και ταυτοχρόνως τον B_N (αφού $B_N x = \mu x$ όταν $x \in M_\mu(B_N)$).

Άρα, η (αριθμήσιμη) ένωση των $\mathcal{E}_\mu$, $\mu \in \sigma_p(B_N)$ είναι ορθοκανονική βάση του A-αναλλοίωτου υποχώρου $N = \ker A$ που διαγωνοποιεί ταυτοχρόνως τους B_N και D_N, άρα και τον $A|_N = B_N + iD_N$. Κατά συνέπεια, οι ιδιόχωροι του $A|_N$ παράγουν τον χώρο N. Αυτό σημαίνει ότι οι ιδιόχωροι του A που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές του A, δηλαδή οι ιδιόχωροι του $A|_N$, (είναι ανά δύο κάθετοι και) παράγουν τον N. Άρα, μαζί με τον $\ker A = M_0(A)$, παράγουν τον χώρο H. □

Λήμμα 2.3 *Έστω $A \in B(H)$ και $M \subseteq H$ κλειστός A-αναλλοίωτος υπόχωρος. Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ ο περιορισμός $B := A|_M$. Τότε, $B^* = A^*|_M$ αν και μόνον αν ο M είναι και A^*-αναλλοίωτος.*

Απόδειξη. Εφόσον εξ ορισμού ο B^* απεικονίζει τον M στον M, αν $B^* = A^*|_M$ τότε βέβαια ο A^* απεικονίζει τον M στον M.

Αντίστροφα, έστω $A^*(M) \subseteq M$. Έστω $x \in M$. Θα δείξω ότι $A^*x = B^*x$. Για κάθε $y \in M$ έχουμε $By = Ay$, άρα

$$\begin{aligned} \langle B^*x, y\rangle &= \langle x, By\rangle \quad (\text{ορισμός του } B^*) \\ &= \langle x, Ay\rangle = \langle A^*x, y\rangle. \end{aligned}$$

Επομένως $\langle B^*x - A^*x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in M$, οπότε το διάνυσμα $B^*x - A^*x$ είναι κάθετο στον M. Όμως $A^*x \in A^*(M) \subseteq M$ από την υπόθεση, άρα $B^*x - A^*x \in M$. Επομένως $B^*x - A^*x = 0$. □

Παράδειγμα 2.4 *Αν $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ο τελεστής της αμφίπλευρης μετατόπισης ($Ue_n = e_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$), ο υπόχωρος $M = \overline{\text{span}}\{e_n : n \geq 0\}$ είναι U-αναλλοίωτος, αλλά ο περιορισμός $S := U|_M$ δεν ικανοποιεί $S^* = U^*|_M$, καθώς $Se_0 = 0$ ενώ $U^*e_0 = e_{-1}$.*

Θεώρημα 2.5 (Φασματικό θεώρημα: Τρίτη μορφή) *Ένας τελεστής A σ' έναν χώρο Hilbert H είναι φυσιολογικός και συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια (πεπερασμένη ή άπειρη) ορθοκανονική ακολουθία (x_n) ιδιοδιανυσμάτων του A, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(a(n))$ ώστε*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| A - \sum_{n=1}^{N} a(n)P[x_n] \right\| = 0 \qquad (\star)$$

(όπου $P[x_n]$ η προβολή στον (μονοδιάστατο) υπόχωρο που παράγει το x_n). Τότε η ακολουθία $(a(n))$, αν είναι άπειρη, είναι μηδενική.

Απόδειξη. Αν ο A ικανοποιεί την $(\star)$ τότε είναι $\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης, άρα συμπαγής. Επίσης, οι τελεστές αυτοί είναι φυσιολογικοί, άρα και ο A είναι φυσιολογικός.

Αντίστροφα, έστω A συμπαγής και φυσιολογικός. Έχουμε δείξει ότι υπάρχει αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση, έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, του χώρου $(\ker A)^\perp$ από ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές του. Δηλαδή υπάρχουν $a(n) \in \mathbb{C}$ ώστε $Ax_n = a(n)x_n$.

Έστω $x \in H$. Γράφουμε $x = \sum_n \langle x, x_n\rangle x_n + x_o$ όπου $x_o \perp \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, δηλαδή $x_o \in \ker A$, οπότε έχουμε

$$Ax = \sum_n \langle x, x_n\rangle Ax_n + 0 = \sum_n \langle x, x_n\rangle a(n)x_n\,.$$

Από την Πρόταση 1.7 η ακολουθία $(a(n))$ είναι μηδενική, αν είναι άπειρη. Επειδή επιπλέον οι προβολές $P[x_n]$ είναι κάθετες ανά δύο, έπεται (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2) ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n)P[x_n]$$

συγκλίνει στην τοπολογία της νόρμας του $\mathcal{B}(H)$. Το όριό της είναι ο τελεστής A, εφόσον η σιερά συγκλίνει κατά σημείο στον τελεστή A. $\square$

3 Πρώτες συνέπειες

Πόρισμα 3.1 *Έστω A συμπαγής φυσιολογικός τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert H. Τότε*

$$\begin{array}{ll} (i) & \|A\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\} \\ (ii) & \|A\| = \max\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \end{array}$$

Απόδειξη. Έστω $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$.
Με τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 2.2, γράφουμε $A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$, οπότε για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2\, \|P_n x\|^2 \leq \sup_n |\lambda_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n x\|^2 \leq \sup_n |\lambda_n|^2 \|x\|^2$$

άρα
$$\|A\| \leq \sup_n |\lambda_n| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}.$$

Όμως το σύνολο $\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\}$ είναι φραγμένο (από το $\|A\|$) και έχει μόνο σημείο συσσώρευσης το 0. Άρα έχει μέγιστο $|\lambda_o|$ ($\lambda_o \in \sigma_p(A)$). Αν $x_o \in M_{\lambda_0}(A)$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|x_o\| = 1$, έχουμε

$$\|A\| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_p(A)\} = |\lambda_o| = \|\lambda_o x_o\| = \|Ax_o\| \leq \|A\|\,,$$

άρα ισχύει ισότητα. Επίσης

$$|\langle Ax_o, x_o\rangle| = |\langle \lambda_o x_o, x_o\rangle| = |\lambda_o| = \|A\|$$

πράγμα που αποδεικνύει και το (ii), αφού η ανισότητα

$$\sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H, \|x\| = 1\} \leq \|A\|$$

είναι άμεση. $\square$

Παρατήρηση 3.2 *Αν δοθούν ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) στον K και (y_n) στον H (όπου H, K χώροι Hilbert) και φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $(\lambda(n))$, ορίζεται φραγμένος τελεστής $A : H \to K$ με*

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \textit{για κάθε } \; x \in H\,.$$

Απόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τον φραγμένο τελεστή πεπερασμένης τάξης

$$A_N := \sum_{i=1}^{N} \lambda(i)(x_i y_i^*) \,.$$

Παρατηρούμε ότι, αν σταθεροποιήσουμε ένα τυχόν $x \in H$, η ακολουθία $(A_n x)$ είναι βασική στον K. Πράγματι, αν $N > M$,

$$\|A_N x - A_M x\|_K^2 = \left\| \sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k \langle x, y_k \rangle x_k \right\|^2 \stackrel{(p)}{=} \sum_{k=M+1}^{N} |\lambda_k \langle x, y_k \rangle|^2 \leq \sup_k |\lambda_k|^2 \sum_{k=M+1}^{N} |\langle x, y_k \rangle|^2$$

όπου η ισότητα (p) έπεται από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αφού η (x_n) είναι ορθοκανονική. Όμως και η (y_n) είναι ορθοκανονική, συνεπώς από την ανισότητα Bessel έχουμε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\langle x, y_k \rangle|^2 \leq \|x\|_H^2$. Επομένως αν δοθεί $\epsilon > 0$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $N > M \geq N_0$ να έχουμε $\sum\limits_{k=M+1}^{N} |\langle x, y_k \rangle|^2 < \epsilon^2$ οπότε η προηγούμενη ανισότητα δίνει $\|A_N x - A_M x\|_K < \|(\lambda_k)\|_\infty \epsilon$. Επομένως υπάρχει το

$$\lim_N A_N(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \in K \quad \text{για κάθε } \ x \in H \,.$$

Ορίζεται δηλαδή η απεικόνιση

$$A : H \to K : \ x \to A(x) := \lim_N A_N(x)$$

η οποία είναι γραμμική, ως κατά σημείο όριο γραμμικών απεικονίσεων. Είναι όμως και φραγμένη από τον αριθμό $\|(\lambda_k)\|_\infty := \sup_k |\lambda_k|$, γιατί για κάθε $x \in H$ και $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|A_N x\|_K^2 = \sum_{k=1}^{N} |\lambda_k \langle x, y_k \rangle|^2 \leq \sup_k |\lambda_k|^2 \sum_{k=M+1}^{N} |\langle x, y_k \rangle|^2 \leq \|(\lambda_k)\|_\infty^2 \|x\|^2$$

άρα και $\|Ax\|_K^2 \leq \|(\lambda_k)\|_\infty^2 \|x\|^2$. □

Παρατήρηση 3.3 *Η νόρμα του τελεστή A ισούται με $\sup_k |\lambda_k|$.*

Επίσης, η σειρά τελεστών $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)$ (δηλαδή η ακολουθία (A_N)) συγκλίνει στη νόρμα του χώρου $\mathcal{B}(H, K)$ (δηλαδή στη νόρμα τελεστή) αν και μόνον αν η $(\lambda(n))$ είναι μηδενική ακολουθία.

Οι ισχυρισμοί αυτοί αφήνονται ως άσκηση.

Θεώρημα 3.4 (Γενική μορφή συμπαγούς τελεστή σε χώρο Hilbert)
Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής μεταξύ χώρων Hilbert H και K, υπάρχουν ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) στον K και (y_n) στον H και (πεπερασμένη ή μηδενική) ακολουθία θετικών αριθμών $(a(n))$ ώστε

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} a(i) x_i y_i^*$$

όπου η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$.

Υπενθύμιση: Αν $x \in K, y \in H$ ο τελεστής $xy^* : H \to K$ ορίζεται από τη σχέση

$$(xy^*)(z) = \langle z, y \rangle x, \ z \in H.$$

Ειδικότερα αν $\|y\| = 1$ ο τελεστής yy^* είναι η προβολή $P[y]$ στον υπόχωρο $[y] = \text{span}\{y\}$ του H.

Απόδειξη. Ονομάζουμε T τον θετικό συμπαγή τελεστή $T = A^*A$. Χρησιμοποιώντας το Φασματικό Θεώρημα γράφουμε

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) P[y_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) y_n y_n^*$$

όπου η (y_n) είναι ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $(\ker T)^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$ από ιδιοδιανύσματα του T με (μη μηδενικές) ιδιοτιμές $(\mu(n))$ (άρα $\mu(n) > 0$, αφού ο T είναι θετικός). Ορίζουμε $x_n = \dfrac{Ay_n}{a(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, όπου $a(n) = \sqrt{\mu(n)}$. Η ακολουθία (x_n) είναι ορθοκανονική: Πράγματι

$$\begin{aligned} \langle x_n, x_m \rangle &= \frac{1}{a(n)a(m)} \langle Ay_n, Ay_m \rangle = \frac{1}{a(n)a(m)} \langle A^*Ay_n, y_m \rangle \\ &= \frac{1}{a_n a_m} \langle \mu_n y_n, y_m \rangle = \frac{\mu(n)}{a(n)a(m)} \langle y_n, y_m \rangle = \delta_{nm}, \end{aligned}$$

αφού η (y_n) είναι ορθοκανονική και $\mu(n) = a(n)^2$. Επειδή οι $(x_n),\ (y_n)$ είναι ορθοκανονικές ακολουθίες και η $(a(n))$ είναι μηδενική (διότι η $(\mu(n))$ είναι μηδενική), η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} a(i) x_i y_i^*$$

συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathcal{B}(H, K)$ (απόδειξη: Άσκηση) και ορίζει φραγμένο (μάλιστα συμπαγή) τελεστή, έστω B. Παρατηρούμε ότι ο B μηδενίζεται στον υπόχωρο $[y_n : n \in \mathbb{N}]^{\perp} = \ker A^*A = \ker A$, ενώ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $By_n = a(n)x_n = Ay_n$, άρα οι (φραγμένοι) τελεστές A και B συμπίπτουν και στον $(\ker A)^{\perp}$, επομένως είναι ίσοι. $\square$