Ένα Λήμμα για δυο ασκήσεις

Λήμμα 1 *Έστω E_1, E_2 χώροι με νόρμα, $D_1 \subseteq E_1$, $D_2 \subseteq E_2$ πυκνοί υπόχωροι. Αν μια διγραμμική (αντίστοιχα sesquilinear) μορφή $\psi : D_1 \times D_2 \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένη, τότε έχει μοναδική επέκταση σε φραγμένη διγραμμική (αντίστοιχα sesquilinear) μορφή $\tilde{\psi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{C}$ (με την ίδια νόρμα).*

Απόδειξη Θυμίζουμε ότι

$$\|\psi\| := \sup\{|\psi(x,y)| : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1\}\,.$$

Επομένως, για κάθε $x \in D_1$ και $y \in D_2$ έχουμε $|\psi(x,y)| \le \|\psi\|\|x\|\|y\|$.

Αν $x, u \in D_1$ και $y, v \in D_2$, έχουμε

$$|\psi(x,y) - \psi(u,v)| = |\psi(x, y-v) + \psi(x-u, v)| \le \|\psi\|(\|x\|\|y-v\| + \|x-u\|\|v\|). \qquad (**)$$

Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $E_1 \times E_2$ (με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο).

Για κάθε $M > 0$ γράφουμε

$$U_M = \{(x,y) \in D_1 \times D_2 : \|x\| < M, \|y\| < M\}$$
$$V_M = \{(\xi,\eta) \in E_1 \times E_2 : \|\xi\| < M, \|\eta\| < M\}$$

και παρατηρούμε ότι το U_M είναι πυκνό στο V_M. Η απεικόνιση

$$\psi_M : U_M \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \psi(x,y)$$

είναι *ομοιόμορφα* συνεχής. [1] Πράγματι, αν $(x,y) \in U_M$ και $(u,v) \in U_M$, έχουμε από την (**)

$$|\psi(x,y) - \psi(u,v)| \le \|\psi\| M(\|y-v\| + \|x-u\|).$$

Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$, αν $\|x-u\| < \frac{\epsilon}{2\|\psi\|M}$ και $\|y-v\| < \frac{\epsilon}{2\|\psi\|M}$ έχουμε $|\psi(x,y) - \psi(u,v)| < \epsilon$.

Συνεπώς η ψ_M επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε μια συνεχή απεικόνιση $\tilde{\psi}_M : V_M \to \mathbb{C}$. Όμως, αν $N > M$, παρατηρούμε ότι $\psi_N|_{U_M} = \psi_M$. Αφού η επέκταση είναι μοναδική, έπεται ότι $\tilde{\psi}_N|_{V_M} = \tilde{\psi}_M$. Έπεται λοιπόν ότι η απεικόνιση $\tilde{\psi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\tilde{\psi}(\xi,\eta) := \tilde{\psi}_M(\xi,\eta) \quad \text{όταν} \ (\xi,\eta) \in V_M$$

είναι καλά ορισμένη στον $E_1 \times E_2$ και επεκτείνει κάθε ψ_M, οπότε

$$\tilde{\psi}(x,y) = \psi(x,y) \ \text{ για κάθε } (x,y) \in D_1 \times D_2\,.$$

Αφού η $\tilde{\psi}_M$ είναι η μοναδική επέκταση της ψ_M, έπεται ότι η $\tilde{\psi}$ είναι η μοναδική επέκταση της ψ.

Πρέπει να δείξουμε ότι, όταν η ψ sesquilinear, η $\tilde{\psi}$ είναι sesquilinear μορφή στο $E_1 \times E_2$ (ομοίως για τη διγραμμική περίπτωση) και ότι είναι φραγμένη. Δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι αν $\xi, \xi' \in E_1, \eta, \eta' \in E_2$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\tilde{\psi}(\xi, \eta + \lambda\eta') = \tilde{\psi}(\xi,\eta) + \bar{\lambda}\tilde{\psi}(\xi,\eta')$$
$$\tilde{\psi}(\xi + \lambda\xi', \eta) = \tilde{\psi}(\xi,\eta) + \lambda\tilde{\psi}(\xi',\eta)$$
$$\text{και } \ \tilde{\psi}(\xi,\eta) \le \|\psi\|\,\|\xi\|\,\|\eta\|\ .$$

[1] ενώ η ψ δεν είναι πάντα ομοιόμορφα συνεχής στον μετρικό χώρο $D_1 \times D_2$

Επιλέγουμε $M > 0$ μεγαλύτερο από τα $\|\xi\|, \|\xi'\|, \|\eta\|, \|\eta'\|, \|\xi+\lambda\xi'\|, \|\eta+\lambda\eta'\|$. Τότε οι σχέσεις που θέλουμε να αποδείξουμε γράφονται

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_M(\xi, \eta+\lambda\eta') &= \tilde{\psi}_M(\xi,\eta) + \bar{\lambda}\tilde{\psi}_M(\xi,\eta') \\ \tilde{\psi}_M(\xi+\lambda\xi', \eta) &= \tilde{\psi}_M(\xi,\eta) + \lambda\tilde{\psi}_M(\xi',\eta) \\ \text{και } \tilde{\psi}_M(\xi,\eta) &\le \|\psi\| \, \|\xi\| \, \|\eta\| \ . \end{aligned}$$

και άρα έπονται από τις αντίστοιχες ισότητες για την ψ_M, οι οποίες όμως είναι προφανείς αφού η ψ_M είναι περιορισμός της ψ. □

Άσκηση 1 *Δείξτε ότι η πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert (δηλ. ότι το εσωτερικό γινόμενο επεκτείνεται στην πλήρωση).*

Απόδειξη Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και H η πλήρωσή του (που είναι χώρος Banach, όπως ξέρουμε), θεωρούμε τον E ως πυκνό υπόχωρο του E και εφαρμόζουμε το Λήμμα για $D_1 = D_2 = E$, $E_1 = E_2 = H$ και $\psi(x,y) = \langle x, y\rangle, \ x, y \in E$. Πρέπει βέβαια να ελεγχθεί ότι η επέκταση $\tilde{\psi}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $\tilde{\psi}(\eta,\xi) = \overline{\tilde{\psi}(\xi,\eta)}$ και $\tilde{\psi}(\xi,\xi) = \|\xi\|^2$, οι οποίες όμως προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο μέσω της $\tilde{\psi}_M$. □

Άσκηση 2 *Έστω $[a_{ij}]$ ένας $\infty \times \infty$ πίνακας μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε*

$$\left| \sum_{i,j} \lambda_i a_{ij} \mu_j \right|^2 \le M^2 \sum_i |\lambda_i|^2 \sum_j |\mu_j|^2 \tag{*}$$

για κάθε $(\lambda_i), (\mu_i) \in c_{00}$.
Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ώστε $a_{ij} = \langle Te_j, e_i\rangle$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη Η ιδέα είναι να δείξω ότι η ανισότητα (*) ισχύει και για $(\lambda_i), (\mu_i) \in \ell^2$:

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi : c_{00} \times c_{00} \to \mathbb{C} : (x,y) \mapsto \sum_{i,j} \overline{y(i)} a_{ij} x(j)$$

όπου $x = (x(i)), y = (y(i))$, η οποία είναι προφανώς sesquilinear. Η υπόθεση (*) λέει ακριβώς ότι η ψ είναι φραγμένη (από το M) αν εφοδιάσουμε τον c_{00} με τη νόρμα του ℓ^2, στον οποίο είναι πυκνός υπόχωρος. Κατά συνέπεια από το Λήμμα η ψ έχει μοναδική επέκταση σε μια sesquilinear μορφή $\tilde{\psi} : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$, η οποία είναι επίσης φραγμένη από M.

Τώρα όμως, επειδή ο ℓ^2 είναι χώρος Hilbert, από το Λήμμα του Riesz έπεται, όπως έχουμε αποδείξει, ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ώστε

$$\tilde{\psi}(x,y) = \langle Tx, y\rangle \quad \text{για κάθε } \ x, y \in \ell^2$$

και ειδικότερα

$$\langle Te_j, e_i\rangle = \tilde{\psi}(e_i, e_j) = \psi(e_i, e_j) = a_{ij} \quad \text{για κάθε } \ i, j \ .$$

Δεύτερη Απόδειξη Παρατηρούμε πρώτα ότι η υπόθεση (*) έχει ως συνέπεια οι στήλες του πίνακα $[a_{ij}]$ να είναι τετραγωνικά αθροίσιμες.

Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αν στην (*) βάλουμε $\mu_j = \delta_{kj}$ προκύπτει

$$\left|\sum_i \lambda_i a_{ik}\right|^2 \leq M^2 \sum_i |\lambda_i|^2$$

για κάθε $(\lambda_i) \in c_{00}$. Θέτοντας τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(\lambda_i) = (\bar{a}_{ik})_{i=1}^n$ έχουμε

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2\right)^2 = \left|\sum_{i=1}^n \bar{a}_{ik} a_{ik}\right|^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^n |\bar{a}_{ik}|^2$$

$$\text{άρα} \quad \sum_{i=1}^n |a_{ik}|^2 \leq M^2$$

Επειδή η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^\infty |a_{ik}|^2 \leq M^2$$

πράγμα που αποδεικνύει τον ισχυρισμό ότι $[a_{ik}]_i \in \ell^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Επομένως η απεικόνιση $e_k \mapsto [a_{ik}]_i$ επεκτείνεται σε μια γραμμική απεικόνιση

$$T_0 : c_{00} \to \ell^2 : (\mu_j) \mapsto (\sum_j a_{ij}\mu_j)_i \,.$$

Τώρα η υπόθεση (*) γράφεται, αν θέσουμε $x = (\mu_j)$ και $y = (\lambda_j)$

$$|\langle T_0 x, y\rangle| = \left|\sum_{i,j} \bar{\lambda}_i a_{ij} \mu_j\right| \leq M \left\|x\right\|_2 \left\|y\right\|_2$$

για κάθε $x, y \in c_{00}$. Παίρνοντας sup στη σχέση αυτή ως προς $y \in c_{00}$ με $\left\|y\right\|_2 \leq 1$, βρίσκουμε

$$\left\|T_0 x\right\|_2 \leq M \left\|x\right\|_2$$

για κάθε $x \in c_{00}$.[2] Έτσι η γραμμική απεικόνιση $T_0 : \ell^2 \to \ell^2$ είναι φραγμένη, και συνεπώς επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $T : c_{00} \to \ell^2$ που ικανοποιεί

$$\langle Te_j, e_i\rangle = \langle T_0 e_j, e_i\rangle = a_{ij}$$

όπως θέλαμε. $\square$

[2](γιατί η νόρμα ενός διανύσματος $z \in \ell^2$ είναι ίση με $\sup\{|\langle z, y\rangle| : y \in c_{00}, \left\|y\right\|_2 \leq 1\}$, αφού ο c_{00} είναι πυκνός στον ℓ^2). Πράγματι, αν $z = (z(i))$, θέτοντας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \frac{1}{\|z\|} \sum_{k=1}^n z(k) e_k$ έχουμε $y_n \in c_{00}$, $\|y_n\| \leq 1$ και $\langle z, y_n\rangle = \frac{1}{\|z\|} \sum_{k=1}^n |z(k)|^2$ που τείνει στην $\|z\|$ καθώς $n \to \infty$.