Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Υπενθύμιση: Ολοκληρωτικοί τελεστές στον $L^2([0,1])$.

Αν $k \in C([0,1]\times[0,1])$, ορίζουμε

$$(T_k^o f)(x) = \int_0^1 k(x,y)f(y)dy, \quad f \in C([0,1]).$$

Ορίζεται έτσι γραμμικός τελεστής $T_k^o : (C([0,1]), \|\cdot\|_2) \to L^2([0,1]), \|\cdot\|_2)$ φραγμένος, με $\|T_k^o\|^2 \le \iint |k(x,y)|^2 dxdy$.

Άρα επεκτείνεται σε $T_k : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$.

Έχουμε δείξει ότι ο T_k είναι συμπαγής.

Πρόβλημα 1. Αν δοθεί $g \in L^2([0,1])$ και $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, να βρεθεί $f \in L^2([0,1])$ ώστε

$$\begin{aligned} \lambda f(x) - \int_0^1 k(x,y)f(y)dy &= g(x) \\ \textit{δηλαδή} \qquad \lambda f - T_k f &= g\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε το Φασματικό Θεώρημα, εξετάζουμε πότε ο T_k είναι αυτοσυζυγής.

Παρατήρηση 2.

$$T_k^* = T_h \qquad \textit{όπου } h(x,y) = \overline{k(y,x)}\,.$$

Συνεπώς ο T_k είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ για κάθε $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$.

Απόδειξη. Αν $f, g \in L^2([0,1]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \langle T_k^* f, g\rangle = \langle f, T_k g\rangle &= \int_0^1 f(y)\overline{(T_k g)(y)}dy \\ &= \int_0^1 f(y)\left(\int_0^1 \overline{k(y,x)g(x)}dx\right)dy \\ &= \iint \overline{k(y,x)}f(y)\overline{g(x)}dydx \\ &= \int\left(\int \overline{k(y,x)}f(y)dy\right)\overline{g(x)}dx \\ &= \int (T_h f)(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \langle T_h f, g\rangle\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Στο εξής υποθέτουμε ότι

$$k(x,y) = \overline{k(y,x)} \quad \text{για κάθε } (x,y) \in [0,1]^2\,.$$

Εφόσον ο τελεστής $T := T_k$ είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής, από το Φασματικό Θεώρημα υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $(\ker T)^{\perp}$ και μια πεπερασμένη ή μηδενική ακολουθία (λ_n) πραγματικών αριθμών ώστε $Tf_n = \lambda_n f_n$ για κάθε n, οπότε

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, f_n \rangle f_n \,.$$

Επομένως, η ολοκληρωτική εξίσωση (1) γράφεται

$$\lambda f - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, f_n \rangle f_n = g \tag{2}$$

και συνεπώς πρέπει να εκφράσουμε τα $\langle f, f_n \rangle$ συναρτήσει της g.

Αν υπάρχει λύση f, από την (1) έχουμε

$$\lambda f - Tf = g \;\Rightarrow\; \lambda \langle f, f_n \rangle - \langle Tf, f_n \rangle = \langle g, f_n \rangle \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως $T = T^*$ οπότε $\langle Tf, f_n \rangle = \langle f, Tf_n \rangle = \langle f, \lambda_n f_n \rangle = \lambda_n \langle f, f_n \rangle$ αφού $\lambda_n \in \mathbb{R}$ και συνεπώς η προηγούμενη ισότητα γράφεται

$$(\lambda - \lambda_n) \langle f, f_n \rangle = \langle g, f_n \rangle \;\; \forall n \,. \tag{3}$$

Αν θέσουμε $\mathbb{N}_\lambda := \{n \in \mathbb{N} : \lambda_n = \lambda\}$, παρατηρούμε ότι $n \in \mathbb{N}_\lambda$ αν και μόνον αν το f_n ικανοποιεί $\lambda f_n - Tf_n = (\lambda - \lambda_n) f_n = 0$. Δηλαδή η οικογένεια $\{f_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου $M_\lambda := \ker(T - \lambda I)$.

• *Αν* η λ δεν είναι ιδιοτιμή του T ξέρουμε (εναλλακτικό θεώρημα Fredholm) ότι ο τελεστής $\lambda I - T$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε έχουμε $f = (\lambda I - T)^{-1} g$. Για να υπολογίσουμε την f, παρατηρούμε ότι $\mathbb{N}_\lambda = \emptyset$ οπότε από την (3) έχουμε

$$\langle f, f_n \rangle = \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

και συνεπώς από την (2) έχουμε

$$g = \lambda f - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f, f_n \rangle f_n = \lambda f - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle f_n$$

$$f = \frac{1}{\lambda} \left(g + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle f_n \right)$$

(αφού $\lambda \neq 0$). Θέτοντας λοιπόν, για κάθε g,

$$f = \frac{1}{\lambda} \left(g + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle f_n \right)$$

έχουμε λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης. (Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n := \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη γιατί η $(\langle g, f_n \rangle)$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη και η $(\frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n})$ είναι φραγμένη αφού $\inf_n |\lambda - \lambda_n| > 0$ εφόσον $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$ (και το μόνο σημείο συσσώρευσης του $\sigma(A)$ είναι το 0).

• Αν πάλι η λ είναι ιδιοτιμή του T, τότε από την (3) προκύπτει ότι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη λύσης είναι η g να ικανοποιεί

$$\langle g, f_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_\lambda \,.$$

Η συνθήκη αυτή είναι και ικανή, γιατί αν θέσουμε

$$f_s = \frac{1}{\lambda}\left(g + \sum_{n \neq \mathbb{N}_\lambda} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle f_n\right)$$

παρατηρούμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει στον $L^2([0,1])$, γιατί η $(\frac{\lambda_n}{\lambda-\lambda_n})_{n\notin\mathbb{N}_\lambda}$ είναι φραγμένη αφού $\inf_{n\notin\mathbb{N}_\lambda} |\lambda - \lambda_n| > 0$ εφόσον η ιδιοτιμή λ είναι μεμονωμένο σημείο του $\sigma(T)$.

Από τη σχέση (3) βλέπουμε ότι η f_s είναι λύση της (1). Κάθε άλλη λύση προκύπτει από την f_s προσθέτοντας μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς $\lambda h - Th = 0$, δηλαδή μια $h \in \ker(\lambda I - T) = M_\lambda$. Εφόσον η $\{f_n : n \in \mathbb{N}_\lambda\}$ είναι ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου M_λ, η *γενική λύση* $f_s + h$ θα γράφεται

$$f_s + h = \frac{1}{\lambda}\left(g + \sum_{n \neq \mathbb{N}_\lambda} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle g, f_n \rangle f_n\right) + \sum_{k \in \mathbb{N}_\lambda} c_k f_k$$

όπου c_k είναι αυθαίρετοι μιγαδικοί αριθμοί. □

Παρατήρηση 3. *Η ακολουθία* (λ_n) *των ιδιοτιμών του ολοκληρωτικού τελεστή* T *δεν είναι μόνον φραγμένη, είναι τετραγωνικά αθροίσιμη:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \leq \int_0^1 \int_0^1 |k(s,t)|^2 ds dt \,.$$

Απόδειξη. Για κάθε $t \in [0,1]$ θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $[0,1] \ni s \mapsto k_t(s) = k(t,s)$. Ο ορισμός του τελεστή T_k μπορεί να γραφτεί

$$(T_k f)(x) = \int_0^1 k_x(y) f(y) dy = \langle k_x, \bar{f} \rangle, \quad f \in L^2([0,1]).$$

Επομένως η σχέση $Tf_n = \lambda_n f_n$ γράφεται $\langle k_x, \bar{f} \rangle = \lambda_n f_n(x)$ οπότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n f_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle k_x, \bar{f}_n \rangle|^2 \overset{(b)}{\leq} \|k_x\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |k_x(y)|^2 dy$$

από την ανισότητα Bessel (b), αφού η $\{\bar{f}_n\}$ είναι ορθοκανονική. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 &= \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 \|f_n\|_{L^2}^2 = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 |\lambda_n f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} |\lambda_n f_n(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k_x(y)|^2 dy\right) dx = \int_0^1 \int_0^1 |k(x,y)|^2 dy dx\end{aligned}$$

και αφού η ανισότητα αυτή αληθεύει για κάθε $N \in \mathbb{N}$, ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. □

Παρατήρηση 4. *Είναι σημαντικό για τις εφαρμογές να παρατηρήσουμε ότι για κάθε* $f \in L^2([0,1])$ *η συνάρτηση* Tf *ανήκει στον χώρο* $C([0,1])$. *Μάλιστα η απεικόνιση*

$$T : (L^2([0,1]), \|\cdot\|_2) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$$

είναι φραγμένος τελεστής.

Πράγματι, από την ανισότητα Cauchy Schwarz έπεται ότι

$$|(T_k f)(x)| = \left| \int_0^1 k_x(y) f(y) dy \right| \le \|k_x\|_{L^2} \left\|\bar{f}\right\|_{L^2} \le \|k_x\|_\infty \|f\|_{L^2} .$$

Αλλά η k είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1] \times [0,1]$, οπότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|(x,y) - s,t)| < \delta$ να έχουμε $|k(x,y) - k(s,t)| < \epsilon$ και ειδικότερα αν $|x - s| < \delta$ να έχουμε $|k(x,y) - k(s,y)| < \epsilon$ για κάθε y, οπότε $\|k_x - k_s\|_\infty = \sup\limits_y |k(x,y) - k(s,y)| \le \epsilon$. Έχουμε λοιπόν

$$|x - s| < \delta \;\Rightarrow\; |(T_k f)(x) - (T_k f)(s)| \le \|k_x - k_s\|_\infty \|f\|_{L^2} \le \epsilon \|f\|_{L^2}$$

δηλαδή η Tf είναι συνεχής συνάρτηση.

Εξάλλου, η προηγούμενη ανισότητα δίνει

$$\begin{aligned} &|(T_k f)(x)| \le \|k_x\|_\infty \|f\|_{L^2} = \sup\{|k(x,y)| : y \in [0,1]\} \|f\|_{L^2} \le M \|f\|_{L^2} \\ \text{άρα} \quad &\|T_k\|_\infty \le M \|f\|_{L^2} \end{aligned}$$

όπου $M := \sup\{|k(x,y)| : (x,y) \in [0,1]^2\}$. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι ο $T : (L^2([0,1]), \|\cdot\|_2) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ είναι φραγμένος (από M).

Έτσι, τα ιδιοδιανύσματα f_n του τελεστή $T \in \mathcal{B}(L^2([0,1])$ που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές ιδιοτιμές είναι στην πραγματικότητα συνεχείς συναρτήσεις, αφού $f_n = \frac{1}{\lambda_n} T f_n$.

Αποδεικνύεται επίσης (δείτε τη βιβλιογραφία) ότι όταν η g είναι συνεχής συνάρτηση και η λ δεν είναι ιδιοτιμή του T, η σειρά που δίνει τη λύση f της ολοκληρωτικής εξίσωσης συγκλίνει, όχι μόνον ως προς τη νόρμα του $L^2([0,1])$, αλλά απόλυτα και ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Βιβλιογραφία

- Σ. Καρανάσιος, *Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές*, Αθήνα (2009).
- B.Bollobás, *Linear Analysis*, Cambridge University Press (1990).