Για τον χώρο του Hardy

Ο χώρος του Hardy H^2 αποτελείται από τις δυναμοσειρές $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ που ικανοποιούν $\sum_k |a_k|^2<\infty$.

Εφοδιάζουμε τον H^2 με τη νόρμα

$$\|f\| := \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2} .$$

Η απεικόνιση

$$V : (a_n) \mapsto f \text{ όπου } f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

είναι προφανώς ισομετρικός ισομορφισμός $\ell^2 \to H^2$, και συνεπώς ο H^2 είναι χώρος Hilbert, και η οικογένεια $\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ όπου $\zeta_k(z) = z^k, k = 0, 1, \dots$ είναι ορθοκανονική βάση του H^2: είναι η εικόνα της συνηθισμένης ορθοκανονικής βάσης του ℓ^2. Επομένως οι συντελεστές (a_n) της δυναμοσειράς της f ικανοποιούν $a_n = \langle f, \zeta_n\rangle$.

Ο χώρος του Hardy περιέχει τον υπόχωρο των *(αναλυτικών) πολυωνύμων* $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$, που είναι μάλιστα πυκνός υπόχωρος του H^2. Μάλιστα ο H^2 περιέχει κάθε δυναμοσειρά $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ με ακτίνα σύγκλισης γνησίως μεγαλύτερη από 1.[1] Δεν είναι όμως αλήθεια ότι κάθε ολόμορφη συνάρτηση $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ανήκει στον H^2. Ένα εύκολο παράδειγμα είναι η $g(z) = \dfrac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Από την άλλη μεριά, για κάθε $f \in H^2$ η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ συγκλίνει απόλυτα για $|z| < 1$. Συνεπώς η f είναι συνάρτηση ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Επομένως ο H^2 περιέχεται στον γραμμ. χώρο $H(\mathbb{D})$ των *ολομόρφων* συναρτήσεων $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$.[2]

Όμως υπάρχουν στοιχεία του H^2 που δεν είναι ολόμορφες σε σημεία της περιφέρειας $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$. Για παράδειγμα αν ορίσουμε $f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$ τότε $f_0 \in H^2$ αφού $(\frac{1}{k}) \in \ell^2$ αλλά η f δεν δέχεται επέκταση που είναι αναλυτική στο σημείο $z = 1$, γιατί $\lim_{r\nearrow 1} f_0(r) = \infty$. Και γενικότερα για κάθε $e^{i\theta} \in S^1$ υπάρχει $f_\theta \in H^2$ που δεν δέχεται επέκταση που είναι αναλυτική στο σημείο $z = e^{i\theta}$: για παράδειγμα η $f_\theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ik\theta}}{k} z^k$.

Έστω $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη με δυναμοσειρά $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$. Έστω $r \in (0, 1)$. Επειδή ο κύκλος $\{re^{it} : t \in \mathbb{R}\}$ ακτίνας r είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{D}$, και η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k} .$$

---

[1] Πράγματι, αν g είναι μια τέτοια δυναμοσειρά, τότε ορίζει συνάρτηση που είναι συνεχής στον *κλειστό* δίσκο $\bar{D}$, άρα και στην μοναδιαία περιφέρεια S^1, οπότε ορίζεται το $\int_0^{2\pi} |g(e^{it})|^2 dt$ το οποίο όμως ισούται με $2\pi \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2$.

[2] Μάλιστα, είναι πυκνός υπόχωρος του $H(\mathbb{D})$ ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$: Πράγματι αν $g \in H(\mathbb{D})$ έχει δυναμοσειρά $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ τότε τα μερικά αθροίσματα $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$ της δυναμοσειράς συγκλίνουν στην g ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$, και βεβαίως $g_n \in H^2$, αφού είναι πολυώνυμα.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \left|\sum_{k=0}^{\infty} b_k (re^{it})^k\right|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (re^{it})^k \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n (re^{-it})^n dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_k \bar{b}_n r^{k+n} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 r^{2k} 2\pi\,.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι αν η g ανήκει στον H^2, τότε

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 = \|g\|^2\,.$$

Αξίζει ίσως να σημειωθεί εδώ ότι οι συναρτήσεις του H^2 δεν επεκτείνονται εν γένει στον κλειστό δίσκο $\overline{D}$ (δες την $f_0(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k$) και συνεπώς δεν ορίζεται εν γένει το ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^{2\pi} |g(re^{it})|^2 dt$ για $r = 1$. Ορίζεται όμως ως ολοκλήρωμα Lebesgue, όπως αποδεικνύεται.

Οι εκτιμήσεις Σημαντική ιδιότητα του H^2 είναι το γεγονός ότι οι *εκτιμήσεις* $f \to f(w)$ στα σημεία w του ανοικτού δίσκου $\mathbb{D}$ είναι συνεχείς ως προς τη νόρμα που ορίσαμε:

Αν $|w| < 1$, η $\phi_w : f \longrightarrow f(w)$ (που προφανώς είναι γραμμική μορφή στον H^2) είναι συνεχής. Πράγματι,

$$|\phi_w(f)|^2 = |f(w)|^2 = \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\right|^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |w^k|^2 = \|f\|^2 \frac{1}{1-|w|^2} \qquad (*)$$

αφού $|w|^2 < 1$.

Αφού ο H^2 είναι χώρος Hilbert, υπάρχει (μοναδική) $k_w \in H^2$ ώστε $\langle f, k_w\rangle = \phi_w(f)$ για κάθε $f \in H^2$. Πράγματι, αν γράψουμε $k_w(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ τότε απ' τον ορισμό του εσωτερικού γινόμενου έχουμε

$$f(w) = \phi_w(f) = \langle f, k_w\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k$$

$$\text{δηλαδή } \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k$$

για κάθε $f \in H^2$. Οπότε θέτοντας $f(z) = z^n$ έχουμε $w^n = \bar{b}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$, άρα

$$k_w(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}^k z^k = \frac{1}{1-\bar{w}z}, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Πόρισμα *Αν μια ακολουθία (f_n) του H^2 συγκλίνει ως προς τη νόρμα που ορίσαμε, τότε συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D}$.*

Απόδειξη Αν $\|f_n - f\| \to 0$ τότε για κάθε $w \in \mathbb{D}$ έχουμε

$$|f_n(w) - f(w)| = |\phi_w(f_n - f)| \le \|\phi_w\|\|f_n - f\| \le \frac{1}{\sqrt{1-|w|^2}}\|f_n - f\|$$

(από την (*)). Τώρα, αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{D}$ και $M := \sup\{\frac{1}{\sqrt{1-|w|^2}} : w \in K\}$, έχουμε

$$|f_n(w) - f(w)| \leq M\|f_n - f\| \quad \text{για κάθε} \;\; w \in K$$

οπότε $f_n(w) \to f(w)$ ομοιόμορφα στο K. $\square$

Βιβλιογραφία Περισσότερα για τον χώρο του Hardy και τους τελεστές του μπορεί κανείς να βρει στο ενδιαφέρον και φιλικό βιβλίο

Ruben A. Martinez-Avendano and Peter Rosenthal, *An Introduction to Operators on the Hardy-Hilbert Space*, Springer Graduate Texts in Mathematics 237, DOI https://doi.org/10.1007/978-0-387-48578-2