Ο Συναρτησιακός Λογισμός

1. Εισαγωγή Ο στόχος είναι, αν $A \in \mathcal{B}(H)$, να ορίσουμε τελεστές $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ για κατάλληλες συναρτήσεις f.

Δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό είναι οι ακόλουθες:

(α) Αν η f είναι μιγαδικό *πολυώνυμο*, της μορφής $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, θέτουμε

$$f(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$

(όπου $A^0 = I$). Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f \to f(A)$ διατηρεί άθροισμα και γινόμενο.

(β) Αν ο A είναι *αυτοσυζυγής* (ή γενικότερα φυσιολογικός) τελεστής και ο χώρος H έχει *πεπερασμένη διάσταση*, τότε ο A διαγωνοποιείται, δηλαδή

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

όπου P_λ είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_λ του A: οι προβολές $\{P_\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και έχουν άθροισμα $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I_H$. Τότε, *για κάθε συνάρτηση* $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ μπορούμε να ορίσουμε

$$A_f := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda \,.$$

Ισοδύναμα, αν διαγωνοποιήσουμε τον A ως προς μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του A, τότε ο A θα έχει διαγώνιο πίνακα

$$A \sim \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\,,$$

ο τελεστής A_f είναι αυτός που έχει πίνακα ως προς την ίδια ορθοκανονική βάση τον

$$A_f \sim \mathrm{diag}(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))\,.$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση (α) ο τελεστής (και ο χώρος) είναι αυθαίρετος ενώ η f περιορίζεται στα πολυώνυμα, ενώ αντίθετα στην περίπτωση (β) η f είναι αυθαίρετη ενώ ο A περιορίζεται στους φυσιολογικούς τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Οι δύο αυτές διαδικασίες, παρότι ξεκινούν από διαφορετικές προσεγγίσεις, *στην ειδική περίπτωση που ο A είναι φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και η f είναι πολυώνυμο*, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$f(A) = A_f$$

Πράγματι, έχουμε

$$A^2 = A\left(\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda A P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 P_\lambda$$

και επαγωγικά $A^m = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda_n^m P_\lambda$. Λόγω γραμμικότητας, έπεται ότι αν $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$, τότε $A_f = \sum\limits_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda = f(A)$.

2. Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές Στα επόμενα, σταθεροποιούμε έναν *αυτοσυζυγή* τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ (όπου ο H είναι χώρος Hilbert αυθαίρετης διάστασης), και έχουμε στόχο να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων f.

Πώς συμπεριφέρεται το φάσμα $\sigma(A)$ όταν εφαρμόζεται στον A ένα πολυώνυμο p;
Στην περίπτωση φυσιολογικού τελεστή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, οπότε $A \sim \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, εφόσον $p(A) = A_p \sim \text{diag}(p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n))$, βλέπουμε ότι το $\sigma(p(A))$ (δηλαδή εδώ το σύνολο των ιδιοτιμών του $p(A)$), είναι το $\{p(a_1), p(a_2), \ldots, p(a_n)\} = p(\sigma(A))$. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει πολύ γενικότερα:

Πρόταση 1 *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, ο $p(A)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή, οπότε το συμπέρασμα αληθεύει. Υποθέτω λοιπόν ότι το p δεν είναι σταθερό.

Αν $\mu \in \mathbb{C}$, το πολυώνυμο $q(z) := p(z) - \mu$ παραγοντοποιείται:
$q(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \ldots (z - \lambda_n)$ (όπου $c \neq 0$). Τότε

$$p(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_n I).$$

Αν κάθε $A - \lambda_k I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε βέβαια το γινόμενό τους, άρα και το $p(A) - \mu I$, είναι αντιστρέψιμο. Αντίστροφα αν το $q(A) = p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο, επειδή οι $A - \lambda_k I$ μετατίθενται, θα είναι όλοι αντιστρέψιμοι.[1] Δηλαδή

$$\mu \notin \sigma(p(A)) \iff p(A) - \mu I \text{ αντιστρέψιμος} \iff \text{κάθε } A - \lambda_k I \text{ αντιστρέψιμος} \iff \text{κάθε } \lambda \notin \sigma(A).$$

Επομένως $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\lambda_k \in \sigma(A)$ για κάποιο $k = 1, \ldots, n$. Αλλά τα λ_k είναι οι ρίζες του q, δηλαδή είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ που ικανοποιούν $p(\lambda) = \mu$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. $\square$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το κρίσιμο βήμα για να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα σε συναρτήσεις που είναι κατάλληλα όρια πολυωνύμων. Ας σημειώσουμε μόνο ότι το Θεώρημα 3 (σε αντίθεση με την προηγούμενη Πρόταση) δεν ισχύει για μη φυσιολογικούς τελεστές. Αν για παράδειγμα $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ και $p(t) = t^2$, τότε $\sigma(A) = \{0, 1\}$ οπότε $\|p\|_{\sigma(A)} = 1$ ενώ $\|p(A)\| > 2$ γιατί π.χ. $\|p(A) \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\| = \sqrt{5}$.

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε αποδείξει την ακόλουθη

Πρόταση 2 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε*

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα 3 *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $A = A^*$ και p είναι πολυώνυμο, τότε*

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Απόδειξη Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το p έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο τελεστής $p(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα από την Πρόταση 2 έχουμε

$$\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\}.$$

[1] Το $q(A)$ μπορεί να γραφεί $q(A) = (A - \lambda_k I)B = B(A - \lambda_k I)$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(A))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι ο $A - \lambda_k I$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμος.

Αλλά $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ από την Πρόταση 1, και η ζητούμενη ισότητα έπεται.

Για την γενική περίπτωση, παρατήρησε ότι αν $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$p(A)^* p(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* \left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k A^k\right) \left(\sum_{r=0}^{n} a_r A^r\right) := q(A)$$

(εφόσον $A = A^*$) όπου q είναι το πολυώνυμο $q(t) = \bar{p}(t)p(t)$ που έχει πραγματικούς συντελεστές. Από την προηγούμενη παράγραφο λοιπόν έχουμε

$$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Όμως $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$ από την ιδιότητα C* και επομένως

$$\begin{aligned}\|p(A)\|^2 &= \|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\bar{p}(\lambda)p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2.\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(A)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ προσεγγίζεται, ομοιόμορφα στο συμπαγές $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$ από πολυώνυμα. Αυτό έπεται από το Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσει κανείς ότι η f επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση ορισμένη σ' ολόκληρο στο διάστημα $[-\|A\|, \|A\|]$.

Θεώρημα 4 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))
*Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A. Επίσης ισχύει $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη. *Ύπαρξη:* Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(A)$, τότε $p(A) = q(A)$ (πράγματι, $\|p(A) - q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$). Επομένως το $p(A)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(A)$. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{P}(\sigma(A))$ τον χώρο των *πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $\sigma(A)$, η απεικόνιση

$$\Phi_o : \ (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|) : \ \ p \to p(A)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι η Φ_o διατηρεί άθροισμα και γινόμενο:

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A) \quad \text{και} \quad (pq)(A) = p(A)q(A)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, τότε

$$(p(A))^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k A^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k A^k = \overline{p}(A)$$

(αφού $A = A^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι $\|\Phi_o(p)\| = \|p(A)\| = \|p\|_{\sigma(A)}$ για κάθε πολυώνυμο p, δηλαδή ότι η απεικόνιση Φ_o είναι ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον ο $\mathcal{P}(\sigma(A))$ είναι πυκνός υπόχωρος του $C(\sigma(A))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Επειδή οι γραμμικές πράξεις, καθώς και η ενέλιξη, είναι (νορμ-) συνεχείς στην $C(\sigma(A))$ και στον $\mathcal{B}(H)$, η επέκταση Φ_c της Φ_o διατηρεί και αυτή το άθροισμα, το γινόμενο και την ενέλιξη, είναι δηλαδή *-μορφισμός. [2]

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ που ταυτίζεται με τον Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. $\square$

Ορισμός 1 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. **Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus)** είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.*

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0.$$

3. Εφαρμογές

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Είναι φανερό ότι, για κάθε πολυώνυμο p, ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A. Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, που είναι όριο πολυωνύμων του A αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι το γεγονός ότι *ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A*. Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 5 *Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον $f(A)$.*

Πρόταση 6 (Φασματικής Απεικόνισης) *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και $f \in C(\sigma(A))$, τότε*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι ένας $\mu \in \mathbb{C}$ ανήκει στο $\sigma(f(A))$ αν και μόνον αν $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ισοδύναμα να δείξουμε ότι

Ο τελεστής $f(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμος $\iff$ $\mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Θέτοντας $g(t) - f(t) - \mu I$, να δείξουμε ότι

Ο τελεστής $g(A)$ είναι αντιστρέψιμος $\iff$ $g(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda \in \sigma(A)\}$.

($\Leftarrow$) Αν η g δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, η συνάρτηση $h(t) := \frac{1}{g(t)}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(A)$. Επειδή $hg = gh = \mathbf{1}$, από τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε $h(A)g(A) = \Phi_c(h)\Phi_c(g) = \Phi_c(hg) = \Phi_c(\mathbf{1}) = I$ και ομοίως $g(A)h(A) = \Phi_c(gh) = \Phi_c(\mathbf{1}) = I$. Άρα ο $g(A)$ είναι αντιστρέψιμος (με αντίστροφο τον $h(A)$).

---

[2] Ας δείξουμε για παράδειγμα ότι $\Phi_c(fg) = \Phi_c(f)\Phi_c(g)$, δηλαδή ότι $(fg)(A) = f(A)g(A)$ όταν $f, g \in C(\sigma(A))$. Υπάρχουν ακολουθίες πολυωνύμων $(p_n), (q_n)$ ώστε $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$ και $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$, οπότε $\|p_nq_n - fg\|_{\sigma(A)} \to 0$. Εφόσον η Φ_c είναι γραμμική ισομετρία, έπεται ότι

$$\|p_n(A) - f(A)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\Phi_c(p_n - f)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$$

και ομοίως $\|q_n(A) - g(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \to 0$ και $\|(p_nq_n)(A) - (fg)(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \to 0$. Αλλά $(p_nq_n)(A) = p_n(A)q_n(A)$ για κάθε n και συνεπώς

$$(fg)(A) = \lim_n (p_nq_n)(A) = \lim_n p_n(A)q_n(A) = \lim_n p_n(A) \lim_n q_n(A) = f(A)g(A).$$

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 \in \sigma(A)$ με $g(\lambda_0) = 0$ και θα δείξουμε ότι ο $g(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων (q_n) που συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$ και επιπλέον ικανοποιεί $q_n(\lambda_0) = 0$ για κάθε n: Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) που συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$ και να θέσουμε $q_n := p_n - p_n(\lambda_0)\mathbf{1}$ (οπότε θα έχουμε $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} = \|p_n - g - p_n(\lambda_0)\mathbf{1}\|_{\sigma(A)} \leq \|p_n - g\|_{\sigma(A)} + |p_n(\lambda_0)| \to 0 + |g(\lambda_0)| = 0$).

Έπεται λοιπόν ότι $\|q_n(A) - g(A)\| = \|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$. Αν ο $g(A)$ ήταν αντιστρέψιμος, θα είχαμε $\left\|g(A)^{-1}q_n(A) - I\right\| = \left\|g(A)^{-1}(q_n(A) - g(A))\right\| \leq \left\|g(A)^{-1}\right\| \|q_n(A) - g(A)\| \to 0$. Θα υπήρχε λοιπόν $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\left\|g(A)^{-1}q_n(A) - I\right\| < 1$. Αυτό σημαίνει, όπως έχουμε δείξει, ότι ο $g(A)^{-1}q_n(A)$ είναι αντιστρέψιμος, οπότε και ο $q_n(A)$ θα ήταν αντιστρέψιμος. Όμως από την Πρόταση 1 έχουμε $\sigma(q_n(A)) = q_n(\sigma(A))$ το οποίο περιέχει το 0 επειδή $q_n(\lambda_0) = 0$. Δεν μπορεί λοιπόν ο $q_n(A)$ να είναι αντιστρέψιμος. □

Πόρισμα 7 *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής.*

- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι πάντα φυσιολογικός.*
- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Αν $f = \lim_n p_n$ όπου p_n πολυώνυμα, επειδή κάθε $p_n(A)$ είναι φυσιολογικός τελεστής (γραμμικός συνδυασμός αυτοσυζυγών), έπεται ότι ο $f(A)$ είναι φυσιολογικός.

Αν τώρα η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(A)$, τότε $\lim_n \bar{p}_n = \bar{f} = f$ και συνεπώς $f = \lim_n q_n$ όπου $q_n = \frac{1}{2}(p_n + \bar{p}_n)$ είναι πραγματικό πολυώνυμο, οπότε ο $q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα και ο $f(A) = \lim_n q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής.

Αντίστροφα αν ο $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής, από την προγούμενη Πρόταση έχουμε ότι
$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A) \subseteq \mathbb{R}$. □

Πρόταση 8 *Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικός αν και μόνον αν $A = A^*$ και $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη ($\Rightarrow$) Αν ο A είναι θετικός, τότε ο A είναι αυτοσυζυγής, και συνεπώς κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στον H με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A - \lambda I)x_n\| \to 0$. Τότε όμως

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n\rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|.\|x_n\| \to 0.$$

Εφόσον $\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$ για κάθε n, έπεται ότι $\lambda = \lim\langle Ax_n, x_n\rangle \geq 0$. Δείξαμε ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

($\Leftarrow$) Αν $A = A^*$, εφαρμόζεται στον A ο συναρτησιακός λογισμός. Αν επίσης $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B^2 = A$. Αφού η f παίρνει πραγματικές τιμές, από το τελευταίο Πόρισμα ο B είναι αυτοσυζυγής.

Κατά συνέπεια ο $A = B^2 = B^*B$ είναι θετικός. □

Πρόταση 9 (Τετραγωνική ρίζα) *Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. *Ο A είναι θετικός.*
2. *Υπάρχει θετικός $B \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $B^2 = A$.*
3. *Υπάρχει $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^*X = A$.*

Απόδειξη (1) $\Rightarrow$ (2) Αν ο A είναι θετικός, δείξαμε προηγουμένως ότι ο τελεστής $B = f(A)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ είναι αυτοσυζυγής και ικανοποιεί $B^2 = A$. Αφού η $f(t) = \sqrt{t}$ παίρνει μη αρνητικές τιμές στο $\sigma(A)$, από την Πρόταση 6 έχουμε ότι $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}_+$, οπότε ο $B = f(A)$ είναι θετικός.

(2) $\Rightarrow$ (3) Προφανές: πάρε $X = B$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Αν $A = X^*X$ τότε για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\langle Ax, x\rangle = \langle X^*Xx, x\rangle = \langle Xx, Xx\rangle \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός. $\square$

Σχόλια (α) Αποδεικνύεται[3] ότι η θετική τετραγωνική ρίζα $f(A)$ ενός θετικού τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι μοναδική. Γράφουμε $f(A) = A^{1/2}$.

(β) Τονίζουμε ότι η υπόθεση $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ δεν εξασφαλίζει ότι ο A είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x\rangle = -1$ για $x = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$.

Πόρισμα 10 *Κάθε* αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ *γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών* $A = A_+ - A_-$ *με* $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. *Επομένως κάθε* $T \in \mathcal{B}(H)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.*

Απόδειξη Θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ ($t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$). Από την Πρόταση 8 οι τελεστές αυτοί είναι θετικοί, αφού οι $f_\pm$ παίρνουν θετικές τιμές. Οι σχέσεις $A = A_+ - A_-$ και $A_+A_- = A_-A_+ = 0$ προκύπτουν από τον συναρτησιακό λογισμό. $\square$

Πρόταση 11 *Έστω* $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ *η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή* A, *όπου* $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι μια αρίθμηση του* $\sigma_p(A)$ *και* $P_n = P(M_{\lambda_n})$.

Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ *είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε*

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } \; x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.
Όταν η f *είναι συνεχής, τότε* $f(A) = A_f$.

Παρατήρηση: Ο τελεστής A_f δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα, $A_{\mathrm{Id}} = I_H$). Όταν όμως η ακολουθία $(f(\lambda_n))$ είναι μηδενική, τότε ο A_f είναι συμπαγής ($\|\cdot\|$-όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης).

Η Απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

[3] μια απόδειξη υπάρχει στο (ii) στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.12 στο "Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών".