On the completion of an inner propduct space

Ορισμός 1. *Έστω E χώρος με νόρμα. Μια πλήρωση (completion) του E είναι ένα (F, ϕ) όπου F χώρος Banach και $\phi : E \to F$ γραμμική ισομετρία με πυκνή εικόνα, δηλ. τ.ω. $\overline{\phi(E)} = F$.*

Πρόταση 1 (Μοναδικότητα)**.** *Η πλήρωση ενός χώρου με νόρμα είναι «ουσιαστικά μοναδική», με την έννοια ότι αν (K, ψ) είναι μια άλλη πλήρωση, τότε υπάρχει γραμμική ισομετρία T από τον F επί του K ώστε $T(\phi(x)) = \psi(x)$ για κάθε $x \in E$.*

$$\begin{tikzcd}
& \phi(E) \arrow[r, tail] \arrow[dd, dashed, tail, two heads] & F = \overline{\phi(E)} \arrow[dd, tail, two heads, "T"] \\
E \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \\
& \psi(E) \arrow[r, tail] & K = \overline{\psi(E)}
\end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Η $\phi : E \to \phi(E)$ είναι γραμμική ισομετρία επί, άρα ορίζεται η $\phi^{-1} : \phi(E) \to E$ και είναι γραμμική ισομετρία επί. Συνεπώς η σύνθεση

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(E) \to E \to \psi(E)$$

είναι γραμμική ισομετρία επί. Επομένως επεκτείνεται μοναδικά σε γραμμική και φραγμένη απεικόνιση

$$T : F = \overline{\phi(E)} \to K = \overline{\psi(E)}\,.$$

Η επέκταση αυτή ικανοποιεί εκ κατασκευής, για κάθε $x \in E$,

$$T(\phi(x)) = \psi \circ \phi^{-1}(\phi(x)) = \psi(x)\,.$$

Επίσης, είναι ισομετρία, γιατί αν $y \in F$, επιλέγοντας μια ακολουθία (x_n) από τον E ώστε $y = \lim_n \phi(x_n)$ έχουμε (αφού η T είναι συνεχής)

$$\|T(y)\| = \lim_n \|T(\phi(x_n))\| = \lim_n \|\psi(x_n)\| = \lim_n \|x_n\| = \lim_n \|\phi(x_n)\| = \|y\|$$

γιατί οι ϕ και ψ είναι ισομετρίες. □

Πρόταση 2 (Ύπαρξη)**.** *Αν $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, υπάρχει χώρος Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ και γραμμική και ισομετρική εμφύτευση $\phi : E \to H$ με πυκνή εικόνα.*

Ο χώρος Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ λέγεται η πλήρωση του $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι ο τοπολογικός δυικός

$$E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{C}) := \{f : E \to \mathbb{C} : \text{bounded linear}\}$$

(κάθε χώρου με νόρμα, άρα και) του E είναι πλήρης ως προς τη νόρμα

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in \text{ball}E\}\,.$$

Κατά συνέπεια ο χώρος

$$F := \{g : E \to \mathbb{C} : \text{φραγμένη αντιγραμμική}\}$$

[1] είναι επίσης πλήρης ως προς τη νόρμα

$$\|g\| := \sup\{|g(x)| : x \in \text{ball}E\}\,.$$

[1]μια g είναι αντιγραμμική αν και μόνον αν η $x \to \overline{g(x)}$ είναι γραμμική

Κάθε $x \in E$ ορίζει μια $g_x \in F$ από τη σχέση

$$g_x(y) := \langle x, y \rangle \,, \; y \in E$$

και η απεικόνιση

$$\phi : E \to F : x \mapsto g_x$$

είναι *γραμμική*, και είναι ισομετρία γιατί, για κάθε $x \in E$,

$$\|g_x\| := \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in \text{ball}E\} = \|x\| \;.$$

Επομένως η κλειστή θήκη $H := \overline{\phi(E)}$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach F, και συνεπώς είναι χώρος Banach. Επειδή περιέχει ένα πυκνό ισομετρικό αντίγραφο του E, ο χώρος H (ακριβέστερα, το ζεύγος H, ϕ) είναι (μια) πλήρωση του E.

Βεβαίως, το εσωτερικό γινόμενο του E μεταφέρεται στον $\phi(E)$ με τον ορισμό

$$\left\langle g_x, g_y \right\rangle_\phi := \langle x, y \rangle \,, \quad x, y \in E.$$

Ισχυρισμός *Το εσωτερικό αυτό γινόμενο επεκτείνεται σε εσωτερικό γινόμενο* $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ *στον* $H \times H$ *που επάγει τη νόρμα του* H*, δηλαδή* $\|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle_H$ *για κάθε* $\xi \in H$.

Αυτό αποδεικνύει ότι η πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert.

Ισχυρισμός *Ο χώρος* H *είναι ίσος με τον χώρο* F *όλων των φραγμένων αντιγραμμικών μορφών* $g : E \to \mathbb{C}$.

Οι αποδείξεις των ισχυρισμών αφήνονται ως Ασκήσεις!