Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις III

Παράδοση: 8/5/2021

1. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, ισχύει η ισοδυναμία
$(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP.$

2. (Μια κλάση τελεστών που περιέχει τις ισομετρίες και τις προβολές.)
Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται *μερική ισομετρία* αν ο $V|_{\ker V^\perp}$ είναι ισομετρία (με *αρχικό χώρο* τον $\ker V^\perp$ και *τελικό χώρο* τον $V(H_1)$). Δείξτε ότι ένας τελεστής $W \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι μερική ισομετρία αν και μόνον αν ο W^*W είναι προβολή, αν και μόνον αν ο W^* είναι μερική ισομετρία και βρείτε τον αρχικό και τον τελικό χώρο του W^*.

3. Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Αν S_A είναι η προβολή στον υπόχωρο $\overline{A(H)}$, τότε
(α) η $S_A^\perp := I - S_A$ είναι η προβολή στον $\ker A$
(β) $S_A A = A$
(γ) αν P είναι προβολή με $PA = A$, τότε $PS_A = S_A$
(δηλ. η S_A είναι η μικρότερη προβολή P που ικανοποιεί $PA = A$).

4. Έστω H χώρος Hilbert και $V, P \in \mathcal{B}(H)$ όπου V ισομετρία και P προβολή. Να δειχθεί ότι

$$VP = PVP \iff P = V^*PVP.$$

5. Έστω $A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k^*$ όπου οι οικογένειες$\{x_k\}$ και $\{y_k\}$ είναι ορθοκανονικές. Προφανώς $\|A\| \le \sum_k |\lambda_k|$. Βρείτε ένα μια καλύτερο φράγμα για την $\|A\|$. [Υπόδειξη: τι συμβαίνει όταν $x_k = y_k = e_k$;] Δείξτε ότι το άνω φράγμα που βρήκατε είναι ισότητα.

6. Έστω $H = H_0 \oplus H_0$ όπου H_0 χώρος Hilbert (π.χ. ℓ^2). Έστω $A \in \mathcal{B}(H_0)$ με $A(H_0)$ όχι κλειστό στον H_0 (π.χ. $A = \operatorname{diag}(\frac{1}{n})$ στον ℓ^2). Ορίζουμε $M = H_0 \oplus \{0\}$ και
$N = \operatorname{Gr}(A) := \{x \oplus Ax : x \in H_0\}$.

Δείξτε ότι οι M και N είναι κλειστοί υπόχωροι του H, αλλά ο $M + N$ δεν είναι κλειστός.

7. (α) Αποδείξτε ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Hilbert H υπάρχει κλειστό και φραγμένο σύνολο που δεν είναι συμπαγές.

(β) Δείξτε ότι ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο $C \subseteq \ell^2$ είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάχει n_ϵ ώστε *για κάθε* $x = (x(k)) \in C$ να έχουμε $\sum_{k > n_\epsilon} |x(k)|^2 < \epsilon^2$.

(γ) Έστω $u = (u(n)) \in \ell^2$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$C_u := \{x = (x(k)) \in \ell^2 : |x(k)| \le |u(k)| \text{ για κάθε } k\}$$

είναι συμπαγές.

8. Αν $K \in \mathcal{B}(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, δείξτε ότι κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $|\langle Ax, y\rangle| \le |\langle Kx, y\rangle|$ για κάθε $x, y \in H$ είναι επίσης συμπαγής. Ειδικότερα αν επιπλέον $K \in \mathcal{B}_+(H)$, κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $-K \le A \le K$ είναι συμπαγής.

9. Έστω $K \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ είναι συμπαγής τελεστής.

(α) Αν οι $A_n, A \in \mathcal{B}(H_2)$ ικανοποιούν $A_n y \to Ay$ για κάθε $y \in H_2$, δείξτε ότι $\|A_n K - AK\| \to 0$.

(β) Δείξτε ότι η μετατροπή της σημειακής σύγκλισης σε σύγκλιση ως προς τη νόρμα δεν ισχύει "από τα δεξιά": δώστε παράδειγμα ακολουθίας (B_n) στον $\mathcal{B}(H_1)$ που ικανοποιεί $B_n x \to 0$ για κάθε $x \in H_1$, αλλά δεν ικανοποιεί $\|KB_n\| \to 0$.

(γ) Χρησιμοποιώντας το (α) και μια ορθοκανονική βάση στον χώρο $\operatorname{im} K$, δώστε μια άλλη απόδειξη ότι ο K προσεγγίζεται από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.