Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙ

Παράδοση: 6 Απριλίου 2021

1. Δείξτε ότι η πλήρωση ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι χώρος Hilbert (δηλ. ότι το εσωτερικό γινόμενο επεκτείνεται στην πλήρωση).

2. Έστω $[a_{ij}]$ ένας $\infty \times \infty$ πίνακας μιγαδικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $M < \infty$ ώστε

$$\left| \sum_{i,j} \lambda_i a_{ij} \mu_j \right|^2 \leq M^2 \sum_i |\lambda_i|^2 \sum_j |\mu_j|^2 \qquad (*)$$

για κάθε $(\lambda_i), (\mu_i) \in c_{00}$.
Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός φραγμένος τελεστής $T \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ώστε $a_{ij} = \langle Te_j, e_i \rangle$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.
Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο συμπέρασμα αν, αντί για την (*), υποθέσουμε ότι ισχύει η ανισότητα $|a_{ij}| \leq M$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$.

3. Στον χώρο H^2 του Hardy, ορίζουμε την απεικόνιση T από τη σχέση $(Tf)(z) = zf(z),\ f \in H^2$. Δείξτε ότι ο T είναι καλά ορισμένος και φραγμένος τελεστής $H^2 \to H^2$ και βρείτε τον συζυγή του.

4. Αν ο τελεστής $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ ορίζεται από την σχέση $T(x_1, x_2) = (0, x_1)$, δείξτε ότι $\|T\| = 1$ ενώ $\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2, \|x\| \leq 1\} = \sup\{|x_1 \bar{x}_2| : |x_1|^2 + |x_2|^2 \leq 1\} = 1/2$.

5. Έστω H χώρος Hilbert με $\dim H > 1$.
Να βρεθεί ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι φυσιολογικός.
Να βρεθεί ένας φυσιολογικός $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι αυτοσυζυγής.
Να βρεθεί ένας αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι θετικός.
Να βρεθεί ένας $V \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $VV^* = I$, αλλά δεν είναι unitary.
Τι συμβαίνει αν επιπλέον ο V είναι 1-1;

6. Αν $f \in C([0,1])$, δείξτε ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f \in B(L^2([0,1])$ είναι μη αρνητικός αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

7. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή
$T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{smallmatrix}\right]$, δηλαδή $T = \left[\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix}\right]$.

Να δειχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

(Εδώ $H_1 \oplus H_2$ είναι ο χώρος όλων των ζευγαριών $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ όπου $x \in H_1, y \in H_2$ με πράξεις κατά συντεταγμένη και εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right] \rangle := \langle x, u\rangle_{H_1} + \langle y, v \rangle_{H_2}\ .)$$

8. Θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T = \left[\begin{smallmatrix} X & Y \\ 0 & W \end{smallmatrix}\right]$ όπου $X, Y, W \in \mathcal{B}(H)$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.

9. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, είναι αλήθεια ότι ο χώρος $T(H_1)$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H_2;

10. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Να δειχθεί ότι $\overline{A(H_1)} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$. Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$. Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$; [Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]