Παρατηρήσεις στις ερωτήσεις από την 1/11/2018

Ξεκινάμε με μια ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T_n : H \to H$ σ' έναν χώρο Hilbert H, και ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε πότε ορίζεται κατά κάποιον τρόπο ένας "οριακός" τελεστής $T : H \to H$.

1. *Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $x, y \in H$ η ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n(x,y))_n$ όπου $a_n(x,y) = \langle T_n x, y\rangle$ είναι συγκλίνουσα, είναι σωστό ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής $T : H \to H$ ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_n \langle T_n x, y\rangle \quad \text{για κάθε } \; x, y \in H;$$

Λύση [Α.Π.] ΝΑΙ! *Ισχυρισμός:* Η οικογένεια $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι *ομοιόμορφα φραγμένη*, δηλ. $\sup_n \|T_n\| := M < \infty$.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $x \in H$ και ορίζουμε $f_n^x : H \to \mathbb{C}$ με $f_n^x(y) = \langle y, T_n(x)\rangle$. Η $\{f_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών (φραγμένα για κάθε n λόγω της Cauchy-Schwarz). Αν σταθεροποιήσουμε ένα y και πάρουμε $\sup\limits_n |f_n^x(y)|$, επειδή η ακολουθία που μας δίνεται είναι συγκλίνουσα, άρα φραγμένη, το sup είναι πεπερασμένο, δηλαδή η $\{f_n^x : n \in \mathbb{N}\}$ είναι *κατά σημείο φραγμένη,* άρα από την αρχή του ομοιόμορφου φράγματος[1] υπάρχει M_x ώστε το $\sup_n \|f_n\| \leq M_x$. Επιλέγοντας $y = T_n(x)/\|T_n(x)\|$ έχουμε ότι $\|T_n(x)\| \leq M_x$ για κάθε n. Άρα, αφού το x που σταθεροποίησα αρχικά ήταν τυχόν, η οικογένεια $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ *συνεχών* γραμμικών τελεστών είναι κατά σημείο φραγμένη, οπότε κάνουμε αρχή ομοιομόρφου φράγματος γι αυτήν και έχουμε ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Τώρα, για κάθε n έχουμε ότι $\langle T_n(x), y\rangle| \leq \|T_n(x)\| \, \|y\| \leq M\|x\|\|y\|$. Τελικά το ϕ (όριο $\phi(x,y) = \lim_n \langle T_n x, y\rangle$ των sesquilinear) είναι φραγμένη sesquilinear μορφή άρα ορίζει φραγμένο τελεστή.

Αυτό απαντάει και την ερώτηση 3.

Σχόλιο. Το επιχείρημα αυτό, που χρησιμοποιεί ουσιωδώς την *πληρότητα* μέσω του Θεωρήματος του Baire, δείχνει ότι, αν η οικογένεια των νορμών $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι φραγμένη, αναγκαστικά θα υπάρχει κάποιο ζεύγος (x, y) για το οποίο η οικογένεια των αριθμών $\{\langle T_n x, y\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι φραγμένη. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται 'condensation of singularities'.

[1] δες πχ. `https://eclass.uoa.gr/modules/document/file.php/MATH495/pubn.pdf`

2. *Αν υποθέσουμε ότι* $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$, *τότε* **για κάθε** $x, y \in H$ *η ακολουθία* $(a_n(x,y))_n$ *είναι φραγμένη, οπότε* **υπάρχει** *συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω* $(b_n(x,y))_n$. *Είναι σωστό ότι τότε ορίζεται καλώς μια συνάρτηση* $b : H \times H \to \mathbb{C}$ *από τη σχέση* $b(x,y) = \lim_n b_n(x,y)$ *για κάθε* $x, y \in H$;

Ήδη ο Σ.Π. απάντησε ότι "ενδέχεται να μην ορίζεται καλώς". Σωστά. Δες όμως στην ερώτηση 4 για έναν "συστηματικό" τρόπο να επιλέγει κανείς μια υπακολουθία, κοινή για όλα τα (x, y).

3. *Πάλι με την υπόθεση* $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$, *αν επιπλέον* **υπάρχει** *μια υπακολουθία* (T_{k_n}) *ώστε η αντίστοιχη* $(\langle T_{k_n}x, y\rangle)_n$ *να είναι συγκλίνουσα* **για κάθε** $x, y \in H$, *είναι σωστό ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής* $T : H \to H$ *ώστε*

$$\langle Tx, y\rangle = \lim_n \langle T_{k_n}x, y\rangle \quad \text{για κάθε } \; x, y \in H?$$

4. *Πάλι με την υπόθεση* $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$, *αν επιπλέον ο χώρος* H *είναι διαχωρίσιμος, μήπως μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία* (T_{k_n}) *ώστε η αντίστοιχη* $(\langle T_{k_n}x, y\rangle)_n$ *να είναι συγκλίνουσα για κάθε* $x, y \in H$;

Σχόλιο. Σταθεροποιούμε πρώτα ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$ του διαχωρίσιμου μετρικού χώρου $H \times H$. Θα ορίσουμε διαδοχικά μια οικογένεια από υπακολουθίες της (T_n): Η ακολουθία $(\langle T_n x_1, y_1\rangle)_n$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(\langle T_n^{(1)} x_1, y_1\rangle)_n$. Θεωρούμε την ακολουθία $(\langle T_n^{(1)} x_2, y_2\rangle)_n$. Είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(\langle T_n^{(2)} x_2, y_2\rangle)_n$. Παρατηρούμε ότι η $(T_n^{(2)})$ είναι υπακολουθία της $(T_n^{(1)})$, που είναι υπακολουθία της (T_n). Συνεχίζοντας επαγωγικά, έχουμε υπακολουθίες $(T_n^{(k)})$ για κάθε k.

Δείχνουμε ότι η *διαγώνια* υπακολουθία $(T_{k_n}) := (T_1^{(1)}, T_2^{(2)}, \dots, T_n^{(n)}, \dots)$ έχει την ιδιότητα ότι το $\lim_n \langle T_{k_n} x_i, y_i\rangle$ υπάρχει για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Μετά, χρησιμοποιώντας και ότι $\sup_n \|T_{k_n}\| < \infty$, συμπεραίνουμε ότι το $\lim_n \langle T_{k_n} x, y\rangle$ υπάρχει για κάθε $x, y \in H$.

Το επιχείρημα αυτό είναι το ίδιο με την απόδειξη ότι το (αριθμήσιμο) γινόμενο συμπαγών (μετρικών) χώρων είναι συμπαγής (μετρικός) χώρος. Μάλιστα για την συμπάγεια δεν είναι απαραίτητο οι χώροι να είναι μετρικοί, ούτε το πλήθος τους αριθμήσιμο (όπως μαθαίνουμε στην Γενική Τοπολογία).