Ερωτήσεις από το μάθημα της Πέμπτης, 1/11/2018
(με αφορμή ένα ενδιαφέρον λάθος...)

Ξεκινάμε με μια ακολουθία $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T_n : H \to H$ σ' έναν χώρο Hilbert H, και ενδιαφερόμαστε να εξετάσουμε πότε ορίζεται κατά κάποιον τρόπο ένας "οριακός" τελεστής $T : H \to H$.

1. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $x, y \in H$ η ακολουθία μιγαδικών αριθμών $(a_n(x,y))_n$ όπου $a_n(x,y) = \langle T_n x, y\rangle$ είναι συγκλίνουσα, είναι σωστό ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής $T : H \to H$ ώστε
$$\langle Tx, y\rangle = \lim_n \langle T_n x, y\rangle \quad \text{για κάθε } \ x, y \in H;$$

2. Αν υποθέσουμε ότι $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$, τότε **για κάθε** $x, y \in H$ η ακολουθία $(a_n(x,y))_n$ είναι φραγμένη, οπότε **υπάρχει** συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $(b_n(x,y))_n$. Είναι σωστό ότι τότε ορίζεται καλώς μια συνάρτηση $b : H \times H \to \mathbb{C}$ από τη σχέση $b(x,y) = \lim_n b_n(x,y)$ για κάθε $x, y \in H$; (ήδη ο Σ.Π. απάντησε ότι "ενδέχεται να μην ορίζεται καλώς")

3. Πάλι με την υπόθεση $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$, αν επιπλέον **υπάρχει** μια υπακολουθία (T_{k_n}) ώστε η αντίστοιχη $(\langle T_{k_n} x, y\rangle)_n$ να είναι συγκλίνουσα **για κάθε** $x, y \in H$, είναι σωστό ότι υπάρχει φραγμένος τελεστής $T : H \to H$ ώστε
$$\langle Tx, y\rangle = \lim_n \langle T_{k_n} x, y\rangle \quad \text{για κάθε } \ x, y \in H?$$

4. (*)[1] Πάλι με την υπόθεση $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$, αν επιπλέον ο χώρος H είναι διαχωρίσιμος, μήπως μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία (T_{k_n}) ώστε η αντίστοιχη $(\langle T_{k_n} x, y\rangle)_n$ να είναι συγκλίνουσα για κάθε $x, y \in H$;

[1] Προαιρετικά