Χώροι Hilbert, διαχωρίσιμοι και μη

Συμβολισμός Αν $\{\alpha_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}^+$, θέτουμε[1]

$$\sum_{i \in I} \alpha_i := \sup\{\sum_{i \in F} \alpha_i : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο } \} \in [0, +\infty]$$

Παρατήρηση 1. *Αν $\sum_{i \in I} \alpha_i < \infty$, το σύνολο $\{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Αν $\alpha := \sum_{i \in I} \alpha_i$, το σύνολο αυτό ισούται με την ένωση $\bigcup\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου

$$I_n = \{i \in I : \alpha_i > \frac{\alpha}{n}\}$$

(γιατί αν $\alpha_i \neq 0$ τότε υπάρχει n ώστε $\alpha_i > \frac{\alpha}{n}$). Κάθε I_n έχει το πολύ n στοιχεία. Γιατί, αν είχε περισσότερα από n, τότε

$$\sum_{i \in I_n} \alpha_i \geqslant \sum_{i \in I_n} \frac{\alpha}{n} > \alpha$$

αλλά

$$\sum_{i \in I_n} \alpha_i \leqslant \sum_{i \in I} \alpha_i = \alpha\,,$$

άτοπο. Επομένως κάθε I_n είναι πεπερασμένο σύνολο, και συνεπώς η ένωσή τους είναι αριθμήσιμη. □

Πρόταση 2 (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)**.** *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και $x \in E$, τότε*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Η **Απόδειξη** είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Bessel $\sum_{i \in F} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2$ για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq I$.

Ειδικότερα, έχουμε

Πόρισμα 3. *Αν $\{e_i : i = 1, \ldots\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$, τότε η σειρά $\sum_k |\langle x, e_k \rangle|^2$ συγκλίνει και*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2\,.$$

[1] Ο συμβολισμός αυτός είναι συμβιβαστός με τον αντίστοιχο για σειρές (αριθμήσιμου πλήθους) μη αρνητικών όρων. Πράγματι, μια σειρά **μη αρνητικών πραγματικών αριθμών** συγκλίνει αν και μόνον αν είναι φραγμένη, και το άθροισμα της σειράς είναι ακριβώς το supremum των μερικών αθροισμάτων της.

Παρατήρηση 4. *Έστω $\mathcal{C} = \{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο* **Hilbert** *H. Η $\mathcal{C}$ είναι βάση του H αν και μόνον αν είναι μεγιστική, αν δηλαδή δεν περιέχεται σε κανένα ορθοκανονικό υποσύνολο του H (εκτός από την $\mathcal{C}$), ισοδύναμα αν το μόνο στοιχείο του H που είναι κάθετο σε καθε στοιχείο της $\mathcal{C}$ είναι το 0.*

Πράγματι: θα δείξω ότι αν η $\mathcal{C}$ δεν είναι μεγιστική τότε έχει μη μηδενικό κάθετο διάνυσμα, ότι αν έχει μη μηδενικό κάθετο διάνυσμα τότε δεν είναι ορθοκανονική βάση, και ότι αν δεν είναι ορθοκανονική βάση, τότε δεν είναι μεγιστική:
• Αν υπάρχει ορθοκανονική οικογένεια $\mathcal{F}$ που περιέχει την $\mathcal{C}$ γνήσια τότε κάθε $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{C}$ είναι (μη μηδενικό και) κάθετο στην $\mathcal{C}$.
• Αν x είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στην $\mathcal{C}$ τότε είναι κάθετο και στην γραμμική της θήκη, άρα αυτή δεν είναι πυκνή, οπότε η $\mathcal{C}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση.
• Και τέλος, αν η γραμμική θήκη της $\mathcal{C}$ δεν είναι πυκνή, τότε (εφόσον ο χώρος είναι Hilbert) υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα z κάθετο στην γραμμική θήκη της $\mathcal{C}$, άρα και στη $\mathcal{C}$, και συνεπώς η οικογένεια $\mathcal{C} \cup \{\frac{z}{\|z\|}\}$ είναι ορθοκανονική, άρα η $\mathcal{C}$ δεν είναι μεγιστική. □

Πρόταση 5. *Κάθε χώρος Hilbert H έχει μια ορθοκανονική βάση. Μάλιστα, κάθε ορθοκανονική οικογένεια $X_0 \subseteq H$ επεκτείνεται σε ορθοκανονική βάση του H.*

Απόδειξη. Έστω

$$\mathcal{X} = \{X \subseteq H \text{ ορθοκανονικό σύνολο και } X \supseteq X_0\}.$$

Θα δείξω ότι η μερικά διατεταγμένη οικογένεια $(\mathcal{X}, \subseteq)$ έχει μεγιστικό στοιχείο.

Έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$ ολικά διατεταγμένο υποσύνολο (αλυσίδα). Ονομάζω X_c την ένωση όλων των στοιχείων της $\mathcal{C}$. Ισχυρίζομαι ότι το X_c ανήκει στην $\mathcal{X}$. Πράγματι, το X_c περιέχει το X_0 (αφού κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}$ το περιέχει). Επίσης, το X_c είναι ορθοκανονικό σύνολο, γιατί αν $x, y \in X_c$, $x \neq y$, τότε υπάρχουν $X_x, X_y \in \mathcal{C}$ ώστε $x \in X_x$, $y \in X_y$, άρα τα x, y έχουν νόρμα 1 και είναι κάθετα μεταξύ τους, γιατί και τα δυο ανήκουν στο μεγαλύτερο από τα X_x, X_y (η $\mathcal{C}$ είναι ολικά διατεταγμένη, οπότε ή $X_x \subseteq X_y$ ή $X_y \subseteq X_x$) που είναι ορθοκανονικό σύνολο.

Δηλαδή το X_c ανήκει στην $\mathcal{X}$ και βεβαίως $X_c \supseteq X$ για κάθε $X \in \mathcal{C}$. Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε αλυσίδα της $\mathcal{X}$ έχει άνω φράγμα στην $\mathcal{X}$. Έπεται από το *Λήμμα του Zorn* (!) ότι η $\mathcal{X}$ έχει μεγιστικό στοιχείο, έστω X_m.

Το X_m είναι λοιπόν ορθοκανονικό σύνολο, περιέχει το X_0, και είναι μεγιστικό ως προς αυτές τις ιδιότητες. Από την Παρατήρηση 4 έπεται ότι είναι ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert H. □

Παρατήρηση 6. *Έστω $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο Hilbert H και $x \in H$. Τότε*

$$x \in \overline{\operatorname{span}\{e_i : \langle x, e_i\rangle \neq 0\}}\,.$$

Απόδειξη. Ονομάζω $J = \{i \in I : \langle x, e_i\rangle = 0\}$. Οι κλειστοί υπόχωροι M_1 και M_2 που παράγονται από τα $\{e_i : i \in J\}$ και $\{e_i : i \notin J\}$ αντιστοίχως είναι κάθετοι μεταξύ τους, και το ευθύ τους άθροισμα $M_1 \oplus M_2$ περιέχει όλα τα e_i, συνεπώς ισούται με H. Άρα $x \in M_1 \oplus M_2$. Όμως $\langle x, e_i\rangle = 0$ για κάθε $i \in J$, οπότε $x \perp M_1$, άρα

$$x \in M_2 = \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \notin J\}} = \overline{\operatorname{span}\{e_i : \langle x, e_i\rangle \neq 0\}}\,. \qquad \square$$

Πρόταση 7 (Ισότητα Parseval)**.** *Έστω $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο E και $x \in E$. Τότε*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, e_i\rangle|^2\,.$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Bessel γνωρίζουμε ότι $\|x\|^2 - \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \geqslant 0$. Αφού $x \in \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}}$, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq I$ και $\{\lambda_i : i \in F\} \subseteq \mathbb{C}$ ώστε $\|x - \sum_{i\in F} \lambda_i e_i\| < \epsilon$. Όμως από το Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης ξέρουμε ότι $\|x - \sum_{i\in F} \lambda_i e_i\| \geqslant \|x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i\|$. Επομένως

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 = \left\| x - \sum_{i \in F}\langle x, e_i\rangle e_i \right\|^2 < \epsilon^2$$

(η ισότητα προκύπτει από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, αφού τα $\sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i$ και $x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i$ είναι κάθετα) και συνεπώς

$$\|x\|^2 - \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{i\in F} |\langle x, e_i\rangle|^2 < \epsilon^2\,.$$

Αφού το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, έπεται ότι $\|x\|^2 - \sum_{i\in I} |\langle x, e_i\rangle|^2 = 0\,.$ $\square$

Ορισμός 1 (Ο χώρος $\ell^2(\Gamma)$)**.** *Έστω Γ μη κενό σύνολο (π.χ. $\Gamma = [0, 1]$). Ονομάζουμε $\ell^2(\Gamma)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων $x : \Gamma \to \mathbb{C}$ που είναι τετραγωνικά αθροίσιμες, δηλαδή ικανοποιούν*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)|^2 := \|x\|_2^2 < \infty$$

(υπενθυμίζω ότι το άθροισμα αυτό είναι εξ ορισμού το supremum των αθροισμάτων πάνω σε όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του Γ).

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμα στον $\ell^2(\Gamma)$.

Πρόταση 8. *Ο χώρος* $(\ell^2(\Gamma), \|\cdot\|_2)$ *είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται όπως στην περίπτωση που το Γ είναι αριθμήσιμο: Έστω (x_n) μια ακολουθία στον $\ell^2(\Gamma)$ που είναι βασική ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ (κάθε x_n είναι μια απεικόνιση $x_n : \Gamma \to \mathbb{C} : \gamma \to x_n(\gamma)$).

Για κάθε $\gamma \in \Gamma$, η ανισότητα $|x_n(\gamma) - x_m(\gamma)| \leqslant \|x_n - x_m\|_2$ δείχνει ότι η ακολουθία $(x_n(\gamma))_n$ είναι βασική ακολουθία στον $\mathbb{C}$. Επειδή ο $\mathbb{C}$ είναι πλήρης, υπάρχει $x(\gamma) \in \mathbb{C}$ ώστε

$$x(\gamma) = \lim_n x_n(\gamma).$$

Έτσι ορίζεται μια συνάρτηση $x : \Gamma \to \mathbb{C} : \gamma \to x(\gamma)$. Πρέπει να δείξουμε (α) ότι η συνάρτηση x ανήκει στον $\ell^2(\Gamma)$, είναι δηλ. τετραγωνικά αθροίσιμη και (β) ότι $\|x - x_n\|_2 \to 0$.

Αν δοθεί $\epsilon > 0$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$m, n \geqslant k \;\Rightarrow\; \|x_n - x_m\|_2 \leqslant \epsilon.$$

Επειδή για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq \Gamma$ ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{\gamma \in F} |x_n(\gamma) - x_m(\gamma)|^2 \leqslant \|x_n - x_m\|_2^2$$

έχουμε

$$m, n \geqslant k \;\Rightarrow\; \sum_{\gamma \in F} |x_n(\gamma) - x_m(\gamma)|^2 \leqslant \epsilon^2. \tag{1}$$

Το άθροισμα έχει πεπερασμένο πλήθος προσθετέων. Επομένως, μπορούμε να πάρουμε όριο ως προς n στην (1) και να συμπεράνουμε ότι

$$m \geqslant k \;\Rightarrow\; \sum_{\gamma \in F} |x(\gamma) - x_m(\gamma)|^2 \leqslant \epsilon^2.$$

Επειδή η σχέση αυτή ισχύει για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq \Gamma$, έπεται ότι

$$m \geqslant k \;\Rightarrow\; \sum_{\gamma \in I} |x(\gamma) - x_m(\gamma)|^2 \leqslant \epsilon^2$$

πράγμα που δείχνει ότι η συνάρτηση $x - x_m = (x(\gamma) - x_m(\gamma))$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη ως προς γ (δηλαδή ανήκει στον $\ell^2(\Gamma)$) για κάθε $m \geqslant k$, οπότε το $x = (x - x_m) + x_m$ ανήκει στον $\ell^2(\Gamma)$ και η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$m \geqslant k \;\Rightarrow\; \|x - x_m\|_2 \leqslant \epsilon$$

επομένως $\|x - x_m\|_2 \to 0$. $\square$

Παρατήρηση 9. *Ο υπόχωρος $c_{00}(\Gamma)$ των $x \in \ell^2(\Gamma)$ που έχουν πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός στον $(\ell^2(\Gamma), \|\cdot\|_2)$.*

Πράγματι, για κάθε $x \in \ell^2(\Gamma)$ και κάθε $\epsilon > 0$, από τον ορισμό της νόρμας (ως supremum) υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $F_\epsilon \subseteq \Gamma$ ώστε

$$\sum_{\gamma \in F_\epsilon} |x(\gamma)|^2 > \|x\|_2^2 - \epsilon^2.$$

Αν λοιπόν $F \subseteq \Gamma$ είναι πεπερασμένο σύνολο που περιέχει το F_ϵ και ονομάσουμε x_F την συνάρτηση που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x_F(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma) & \text{όταν } \gamma \in F \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε $x_F \in c_{00}(\Gamma)$ και [2]

$$\|x_F - x\|_2^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus F} |x(\gamma)|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)|^2 - \sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)|^2 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{\gamma \in F_\epsilon} |x(\gamma)|^2 < \epsilon^2$$

διότι $\sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)|^2 \geqslant \sum_{\gamma \in F_\epsilon} |x(\gamma)|^2$. $\square$

Το εσωτερικό γινόμενο στον $\ell^2(\Gamma)$ μπορεί να ορισθεί ως εξής:
Έστω $x, y \in \ell^2(\Gamma)$. Για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \Gamma$ έχουμε

$$\sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)\overline{y(\gamma)}| \leqslant \left(\sum_{\gamma \in F} |x(\gamma)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\gamma \in F} |y(\gamma)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2$$

επομένως

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |x(\gamma)\overline{y(\gamma)}| \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2 < \infty$$

πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει ένα *αριθμήσιμο* σύνολο $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ ώστε $x(\gamma)\overline{y(\gamma)} = 0$ για κάθε $\gamma \notin \Gamma_1$ (Παρατήρηση 1) και ότι, για κάθε αρίθμηση $\{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$ του Γ_1 η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x(\gamma_n)\overline{y(\gamma_n)}$ συγκλίνει απόλυτα, συνεπώς συγκλίνει και το όριό της είναι ανεξάρτητο από την αρίθμηση του Γ_1: το συμβολίζουμε με $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma_1} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}$. Θέτουμε

$$\langle x, y \rangle := \sum_{\gamma \in \Gamma_1} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}\,.$$

[2] Σημειώνουμε παρεμπιπτόντως ότι δείξαμε ότι το *δίκτυο* (x_F) (όπου το σύνολο δεικτών είναι το κατευθυνόμενο σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του $(\Gamma, \subseteq)$) συγκλίνει στο x.

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\ell^2(\Gamma)$ που επάγει την $\|\cdot\|_2$. [3]

Παρατήρηση 10. *Η οικογένεια* $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subseteq \ell^2(\Gamma)$ *όπου*

$$e_\gamma(\delta) = \begin{cases} 1 & : \quad \delta = \gamma \\ 0 & : \quad \delta \neq \gamma \end{cases}$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\Gamma)$*, γιατί δεν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο σ' όλην την οικογένεια (Παρατήρηση 6). Επομένως, αν το* Γ *δεν είναι αριθμήσιμο, ο* $\ell^2(\Gamma)$ *δεν είναι διαχωρίσιμος (και αν είναι αριθμήσιμο, ο* $\ell^2(\Gamma)$ *είναι διαχωρίσιμος, ισομετρικά ισόμορφος με τον* $\ell^2(\mathbb{N}) = \ell^2$ *ή, αν το* Γ *έχει* n *στοιχεία, με τον* $\mathbb{K}^n$*).*

Πρόταση 11. *Αν ένας χώρος Hilbert* H *έχει ορθοκανονική βάση* $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$*, τότε είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον* $\ell^2(\Gamma)$*.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $x_\gamma \to e_\gamma$ επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία του H επί του $\ell^2(\Gamma)$.

Ο χώρος $H_0 := \operatorname{span}\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ είναι πυκνός υπόχωρος του H. Κάθε $x \in H_0$ έχει πεπερασμένο φορέα $F_x := \{\gamma \in \Gamma : \langle x, x_\gamma\rangle \neq 0\}$ και γράφεται $x = \sum_{\gamma \in F_x} \langle x, x_\gamma\rangle x_\gamma$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$U_0 : H_0 \to \ell^2(\Gamma) : x \to (\langle x, x_\gamma\rangle)_{\gamma \in F_x}$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική και στέλνει τον H_0 επί του $c_{00}(\Gamma)$, γιατί για κάθε $(\lambda_\gamma) \in c_{00}(\Gamma)$, θέτοντας $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma x_\gamma$ (το άθροισμα έχει πεπερασμενο πλήθος μη μηδενικών όρων) έχουμε $U_0(x) = (\lambda_\gamma)$.

Η ισότητα Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$$

(Πρόταση 7) δείχνει ότι η U_0 είναι ισομετρία. Επεκτείνεται λοιπόν μοναδικά σε γραμμική ισομετρία $U : H \to \ell^2(\Gamma)$.

Η U είναι επί του $\ell^2(\Gamma)$, γιατί ο χώρος $U(H)$ είναι πλήρης, άρα κλειστός υπόχωρος του $\ell^2(\Gamma)$, και περιέχει τον πυκνό υπόχωρο $c_{00}(\Gamma)$, άρα είναι ίσος με τον $\ell^2(\Gamma)$. $\square$

[3] Επίσης αποδεικνύεται ότι το $\langle x, y\rangle$ είναι το όριο του δικτύου $(\langle x, y\rangle_F)$ των μερικών αθροισμάτων $\langle x, y\rangle_F := \sum_{\gamma \in F} x(\gamma)\overline{y(\gamma)}$.