

Ο Συναρτησιακός Λογισμός

1. Εισαγωγή Ο στόχος είναι, αν $A \in \mathcal{B}(H)$, να ορίσουμε τελεστές $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ για κατάλληλες συναρτήσεις f .

Δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα αυτό είναι οι ακόλουθες:

(α) Αν η f είναι μιγαδικό πολυώνυμο, της μορφής $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, θέτουμε

$$f(A) := \sum_{k=0}^n a_k A^k$$

(όπου $A^0 = I$). Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f \rightarrow f(A)$ διατηρεί άθροισμα και γινόμενο.

(β) Αν ο A είναι αυτοσυζυγής (ή γενικότερα φυσιολογικός) τελεστής και ο χώρος H έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε ο A διαγωνοποιείται, δηλαδή

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$$

όπου P_λ είναι η προβολή στον ιδιόχωρο M_λ του A : οι προβολές $\{P_\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ είναι κάθετες ανά δύο και έχουν άθροισμα $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda = I_H$. Τότε, για κάθε συνάρτηση $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ μπορούμε να ορίσουμε

$$A_f := \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda.$$

Ισοδύναμα, αν διαγωνοποιήσουμε τον A ως προς μια ορθοκανονική βάση του H από ιδιοδιανύσματα του A , τότε ο A θα έχει διαγώνιο πίνακα

$$A \sim \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n),$$

ο τελεστής A_f είναι αυτός που έχει πίνακα ως προς την ίδια ορθοκανονική βάση τον

$$A_f \sim \text{diag}(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)).$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση (α) ο τελεστής (και ο χώρος) είναι αυθαίρετος ενώ η f περιορίζεται στα πολυώνυμα, ενώ αντίθετα στην περίπτωση (β) η f είναι αυθαίρετη ενώ ο A περιορίζεται στους φυσιολογικούς τελεστές σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Οι δύο αυτές διαδικασίες, παρότι ξεκινούν από διαφορετικές προσεγγίσεις, στην ειδική περίπτωση που ο A είναι φυσιολογικός τελεστής σε χώρο πεπερασμένης διάστασης και η f είναι πολυώνυμο, δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα:

$$f(A) = A_f$$

Πράγματι, έχουμε

$$A^2 = A \left(\sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda \right) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda A P_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^2 P_\lambda$$

και επαγωγικά $A^m = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^m P_\lambda$. Λόγω γραμμικότητας, έπεται ότι αν $f(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n$,

τότε $A_f = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda = f(A)$.

2. Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές Στα επόμενα, σταθεροποιούμε έναν αυτοσυζυγή τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ (όπου ο H είναι χώρος Hilbert αυθαίρετης διάστασης), και έχουμε στόχο να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων f .

Πώς συμπεριφέρεται το φάσμα $\sigma(A)$ όταν εφαρμόζεται στον A ένα πολυώνυμο p ;

Στην περίπτωση φυσιολογικού τελεστή σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, οπότε $A \sim \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, εφόσον $p(A) = A_p \sim \text{diag}(p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n))$, βλέπουμε ότι το $\sigma(p(A))$ (δηλαδή εδώ το σύνολο των ιδιοτιμών του $p(A)$), είναι το $\{p(a_1), p(a_2), \dots, p(a_n)\} = p(\sigma(A))$. Το αντίστοιχο αποτέλεσμα ισχύει πολύ γενικότερα:

Πρόταση 1 Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, ο $p(A)$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού τελεστή, οπότε το συμπέρασμα αληθεύει. Υποθέτω λοιπόν ότι το p δεν είναι σταθερό.

Αν $\mu \in \mathbb{C}$, το πολυώνυμο $q(z) := p(z) - \mu$ παραγοντοποιείται:

$q(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \dots (z - \lambda_n)$ (όπου $c \neq 0$). Τότε

$$p(A) - \mu I = c(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \dots (A - \lambda_n I).$$

Αν κάθε $A - \lambda_k I$ είναι αντιστρέψιμος, τότε βέβαια το γινόμενο τους, άρα και το $p(A) - \mu I$, είναι αντιστρέψιμο. Αντίστροφα αν το $p(A) - \mu I$ είναι αντιστρέψιμο, επειδή οι $A - \lambda_k I$ μετατίθενται, θα είναι όλοι αντιστρέψιμοι.¹ Δηλαδή

$\mu \notin \sigma(p(A)) \iff p(A) - \mu I$ αντιστρέψιμος \iff κάθε $A - \lambda_k I$ αντιστρέψιμος \iff κάθε $\lambda \notin \sigma(A)$.

Επομένως $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\lambda_k \in \sigma(A)$ για κάποιο $k = 1, \dots, n$. Αλλά τα λ_k είναι οι ρίζες του q , δηλαδή είναι ακριβώς οι μιγαδικοί αριθμοί λ που ικανοποιούν $p(\lambda) = \mu$.

Δείξαμε λοιπόν ότι $\mu \in \sigma(p(A))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(A)$, δηλαδή αν και μόνον αν $\mu \in \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. \square

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το κρίσιμο βήμα για να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \rightarrow p(A)$ από τα πολυώνυμα σε συναρτήσεις που είναι κατάλληλα όρια πολυωνύμων. Ας σημειώσουμε μόνο ότι το Θεώρημα 3 (σε αντίθεση με την προηγούμενη Πρόταση) δεν ισχύει για μη φυσιολογικούς τελεστές. Αν για παράδειγμα $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $p(t) = t^2$, τότε $\sigma(A) = \{0, 1\}$ οπότε $\|p\|_{\sigma(A)} = 1$ ενώ $\|p(A)\| > 2$ γιατί π.χ. $\|p(A) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\| = \sqrt{5}$.

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε αποδείξει την ακόλουθη

Πρόταση 2 Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Τότε

$$\|A\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα 3 Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $A = A^*$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)}.$$

Απόδειξη Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το p έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ο τελεστής $p(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα από την Πρόταση 2 έχουμε

$$\|p(A)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(A))\}.$$

¹Το $q(A)$ μπορεί να γραφεί $q(A) = (A - \lambda_k I)B = B(A - \lambda_k I)$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(A))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι ο $A - \lambda_k I$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμος.

Αλλά $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$ από την Πρόταση 1, και η ζητούμενη ισότητα έπεται.

Για την γενική περίπτωση, παρατήρησε ότι αν $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, τότε

$$p(A)^* p(A) = \left(\sum_{k=0}^n a_k A^k \right)^* \left(\sum_{r=0}^n a_r A^r \right) = \left(\sum_{k=0}^n \bar{a}_k A^k \right) \left(\sum_{r=0}^n a_r A^r \right) := q(A)$$

(εφόσον $A = A^*$) όπου q είναι το πολυώνυμο $q(t) = \bar{p}(t)p(t)$ που έχει πραγματικούς συντελεστές. Από την προηγούμενη παράγραφο λοιπόν έχουμε

$$\|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Όμως $\|p(A)\|^2 = \|p(A)^* p(A)\| = \|q(A)\|$ από την ιδιότητα C^* και επομένως

$$\begin{aligned} \|p(A)\|^2 &= \|q(A)\| = \sup\{|q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} \\ &= \sup\{|\bar{p}(\lambda)p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = (\sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\})^2. \end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. \square

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \rightarrow p(A)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ προσεγγίζεται, ομοιόμορφα στο συμπαγές $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|] \subseteq \mathbb{R}$ από πολυώνυμα. Αυτό έπεται από το Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσει κανείς ότι η f επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση ορισμένη σ' ολόκληρο στο διάστημα $[-\|A\|, \|A\|]$.

Θεώρημα 4 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \rightarrow (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A . Επίσης ισχύει $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p .

Απόδειξη. Υπαρξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(A)$, τότε $p(A) = q(A)$ (πράγματι, $\|p(A) - q(A)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} = 0$). Επομένως το $p(A)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(A)$. Δηλαδή, αν συμβολίσουμε με $\mathcal{P}(\sigma(A))$ τον χώρο των πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $\sigma(A)$, η απεικόνιση

$$\Phi_o : (\mathcal{P}(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \rightarrow (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|) : p \rightarrow p(A)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι η Φ_o διατηρεί άθροισμα και γινόμενο:

$$(p + q)(A) = p(A) + q(A) \quad \text{και} \quad (pq)(A) = p(A)q(A)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:

Αν $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$, τότε

$$(p(A))^* = \left(\sum_{k=0}^n a_k A^k \right)^* = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k A^k = \bar{p}(A)$$

(αφού $A = A^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι $\|\Phi_o(p)\| = \|p(A)\| = \|p\|_{\sigma(A)}$ για κάθε πολυώνυμο p , δηλαδή ότι η απεικόνιση Φ_o είναι ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον ο $\mathcal{P}(\sigma(A))$ είναι πυκνός υπόχωρος του $C(\sigma(A))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$.

Επειδή οι γραμμικές πράξεις, καθώς και η ενέλιξη, είναι (νορμ-) συνεχείς στην $C(\sigma(A))$ και στον $\mathcal{B}(H)$, η επέκταση Φ_c της Φ_o διατηρεί και αυτή το άθροισμα, το γινόμενο και την ενέλιξη, είναι δηλαδή *-μορφισμός.²

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής *-μορφισμός $C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ που ταυτίζεται με τον Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. \square

Ορισμός 1 Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \rightarrow \mathcal{B}(H)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο

$$f(A) = \lim p_n(A) \text{ όπου } (p_n) \text{ πολυώνυμα με } \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0.$$

3. Εφαρμογές

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Είναι φανερό ότι, για κάθε πολυώνυμο p , ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A . Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι το γεγονός ότι ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A . Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p , άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 5 Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A . Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον $f(A)$.

Πρόταση 6 Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι θετικός αν και μόνον αν $A = A^*$ και $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

Απόδειξη (\Rightarrow) Αν ο A είναι θετικός, τότε ο A είναι αυτοσυζυγής, και συνεπώς κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, άρα υπάρχει ακολουθία (x_n) στον H με $\|x_n\| = 1$ και $\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$. Τότε όμως

$$|\langle Ax_n, x_n \rangle - \lambda| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\| \cdot \|x_n\| \rightarrow 0.$$

Εφόσον $\langle Ax_n, x_n \rangle \geq 0$ για κάθε n , έπεται ότι $\lambda = \lim \langle Ax_n, x_n \rangle \geq 0$. Δείξαμε ότι $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$.

(\Leftarrow) Αν $A = A^*$, εφαρμόζεται στον A ο συναρτησιακός λογισμός. Αν επίσης $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$, η συνάρτηση $f(t) = \sqrt{t}$ είναι καλά ορισμένη (πραγματική) και συνεχής στο $\sigma(A)$. Επομένως αν θέσουμε $B = f(A)$, έχουμε $B^2 = A$.

Παρατηρούμε ότι ο B είναι αυτοσυζυγής: πράγματι, αν $f = \lim_n p_n$ όπου p_n πολυώνυμα, τότε $\lim_n \bar{p}_n = \bar{f} = f$ αφού η f είναι πραγματική, και συνεπώς $f = \lim_n q_n$ όπου $q_n = \frac{1}{2}(p_n + \bar{p}_n)$ είναι πραγματικό πολυώνυμο, οπότε ο $q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα και ο $B = \lim_n q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής.

Κατά συνέπεια ο $A = B^2 = B^*B$ είναι θετικός. \square

²Ας δείξουμε για παράδειγμα ότι $\Phi_c(fg) = \Phi_c(f)\Phi_c(g)$, δηλαδή ότι $(fg)(A) = f(A)g(A)$ όταν $f, g \in C(\sigma(A))$. Υπάρχουν ακολουθίες πολυωνύμων $(p_n), (q_n)$ ώστε $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0$ και $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0$, οπότε $\|p_n q_n - fg\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0$. Εφόσον η Φ_c είναι γραμμική ισομετρία, έπεται ότι

$$\|p_n(A) - f(A)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|\Phi_c(p_n - f)\|_{\mathcal{B}(H)} = \|p_n - f\|_{\sigma(A)} \rightarrow 0$$

και ομοίως $\|q_n(A) - g(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \rightarrow 0$ και $\|(p_n q_n)(A) - (fg)(A)\|_{\mathcal{B}(H)} \rightarrow 0$. Αλλά $(p_n q_n)(A) = p_n(A)q_n(A)$ για κάθε n και συνεπώς

$$(fg)(A) = \lim_n (p_n q_n)(A) = \lim_n p_n(A)q_n(A) = \lim_n p_n(A) \lim_n q_n(A) = f(A)g(A).$$

Πρόταση 7 (Τετραγωνική ρίζα) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Ο A είναι θετικός.
2. Υπάρχει θετικός $B \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $B^2 = A$.
3. Υπάρχει $X \in \mathcal{B}(H)$ ώστε $X^*X = A$.

Απόδειξη (1) \Rightarrow (2) Αν ο A είναι θετικός, δείξαμε προηγουμένως ότι ο τελεστής $B = f(A)$ όπου $f(t) = \sqrt{t}$ είναι αυτοσυζυγής και ικανοποιεί $B^2 = A$.

Δείχνουμε ότι ο B είναι θετικός: Η f είναι όριο στο $\sigma(A)$ ακολουθίας (p_n) πολυωνύμων που είναι μη αρνητικά στο $\sigma(A)$ (γιατί;), οπότε $B = f(A) = \lim_n p_n(A)$. Αφού το κάθε p_n είναι πραγματικό, ο $p_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής, και αφού το p_n είναι μη αρνητικό στο $\sigma(A)$, έχουμε $\sigma(p_n(A)) = p_n(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}_+$, συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση κάθε $p_n(A)$ είναι θετικός τελεστής, άρα και ο B είναι θετικός.

(2) \Rightarrow (3) Προφανές: πάρε $X = B$.

(3) \Rightarrow (1) Αν $A = X^*X$ τότε για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\langle Ax, x \rangle = \langle X^*Xx, x \rangle = \langle Xx, Xx \rangle \geq 0$$

άρα ο A είναι θετικός. □

Σχόλια (α) Αποδεικνύεται³ ότι η θετική τετραγωνική ρίζα $f(A)$ ενός θετικού τελεστή $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι μοναδική. Γράφουμε $f(A) = A^{1/2}$.

(γ) Τονίζουμε ότι η υπόθεση $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$ δεν εξασφαλίζει ότι ο A είναι θετικός. Για παράδειγμα, ο $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ έχει μη αρνητικό φάσμα ($\sigma(A) = \{0\}$) αλλά δεν είναι θετικός: $\langle Ax, x \rangle = -1$ για $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Πόρισμα 8 Κάθε αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται ως διαφορά δύο θετικών τελεστών $A = A_+ - A_-$ με $A_+A_- = A_-A_+ = 0$. Επομένως κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός συνδυασμός (το πολύ) τεσσάρων θετικών τελεστών.

Απόδειξη Θέτουμε $A_+ = f_+(A)$ και $A_- = f_-(A)$ όπου $f_+(t) = \max\{t, 0\}$ και $f_-(t) = -\min\{t, 0\}$ ($t \in \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$).

Πρόταση 9 Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A , όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$.

Αν $f : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.

Όταν η f είναι συνεχής, τότε $f(A) = A_f$.

Παρατήρηση: Ο τελεστής A_f δεν είναι πάντα συμπαγής (για παράδειγμα, $A_{\text{Id}} = I_H$). Όταν όμως η ακολουθία $(f(\lambda_n))$ είναι μηδενική, τότε ο A_f είναι συμπαγής ($\|\cdot\|$ -όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης).

Η Απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

³μια απόδειξη υπάρχει στο (ii) στην απόδειξη της Πρότασης 2.4.12 στο “Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών”.