Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις V

1. Έστω H χώρος Hilbert, M και N υπόχωροι του H, με $\dim M = k$ και $\dim N^\perp = k-1$. Δείξτε ότι $M \cap N \neq \{0\}$. [Υπόδειξη: Ένα γραμμικό σύστημα $k-1$ εξισώσεων με k αγνώστους έχει μη μηδενική λύση.]

2. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και M κλειστός υπόχωρος του H. Δείξτε ότι

$$\sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in M, \|x\| = 1\} = \max\{\langle Ax, x\rangle : x \in M, \|x\| = 1\}.$$

[Υπόδειξη. Εξετάστε τον συμπαγή αυτοσυζυγή τελεστή $PA|_M$, όπου P η προβολή στον M.]

3. (*Αρχή min-max του Courant*) Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ συμπαγής θετικός τελεστής, και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του $(\ker A)^\perp$ από ιδιοδιανύσματα του A. Υπάρχουν λοιπόν θετικοί αριθμοί $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ ώστε $Ax_n = \lambda_n x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Διατάσσουμε την (λ_n) κατά φθίνουσα (μη αύξουσα) σειρά: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$.

Για κάθε υπόχωρο $V \subseteq H$, θέτουμε $\mu(V) := \sup\{\langle Ax, x\rangle : x \in V^\perp, \|x\| = 1\}$.

Ξέρουμε ότι $\|A\| = \max\{\langle Ax, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} = \mu(0)$.

Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = \min\{\mu(V) : \dim V = k-1\} = \min\{\max\{\langle Ax, x\rangle : x \in V^\perp, \|x\| = 1\} : \dim V = k-1\}.$$

[Υπόδειξη. Μπορεί να χρειασθούν οι δυο προηγούμενες ασκήσεις.]

4. Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ διαγωνοποιήσιμος τελεστής (δηλαδή, υπάρχει μια *ορθοκανονική βάση του* H από ιδιοδιανύσματα του A). Δείξτε ότι κάθε ιδιόχωρος $M_\lambda(A)$ του A περιέχεται στον ιδιόχωρο $M_{|\lambda|^2}(A^*A)$ του A^*A και ότι $\sigma_p(A^*A) = \{|\lambda|^2 : \lambda \in \sigma_p(A)\}$.

5. (α) Δείξτε ότι αν ένας φραγμένος τελεστής A είναι διαγωνοποιήσιμος ως προς μία *ορθοκανονική βάση* $\{e_n\}$ ενός χώρου Hilbert H τότε οι ιδιοτιμές του είναι ακριβώς οι αριθμοί a_n ώστε $Ae_n = a_n e_n$. Δείξτε επίσης ότι ο ιδιόχωρος M_λ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ είναι η κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\{e_n : a_n = \lambda\}$, ότι οι ιδιόχωροι αυτοί είναι κάθετοι ανά δυο και παράγουν τον H.

(β) Δείξτε ότι ο τελεστής $S^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$ έχει μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που παράγουν το χώρο. (δηλ. η κλειστή γραμμική τους θήκη είναι ο ℓ^2).

6. Δίδονται ορθοκανονικές ακολουθίες (x_n) και (y_n) στους χώρους Hilbert K και H αντίστοιχα, και μια φραγμένη ακολουθία θετικών αριθμών $(\lambda(n))$. Έχουμε δείξει ότι ορίζεται φραγμένος τελεστής $T : H \to K$ με

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)(x) \quad \text{για κάθε } x \in H\,.$$

Δείξτε ότι η νόρμα του τελεστή T ισούται με $\sup_k |\lambda_k|$.

Επίσης, δείξτε ότι η σειρά τελεστών $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(i)(x_i y_i^*)$ συγκλίνει στη νόρμα του χώρου $\mathcal{B}(H, K)$ (δηλαδή στη νόρμα τελεστή) αν και μόνον αν η $(\lambda(n))$ είναι μηδενική ακολουθία.

7. Έστω $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n$ η φασματική ανάλυση ενός συμπαγούς φυσιολογικού τελεστή A, όπου $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αρίθμηση του $\sigma_p(A)$ και $P_n = P(M_{\lambda_n})$.
Αν $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, ορίζουμε

$$A_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n x \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει (κατά σημείο) και ορίζει φραγμένο φυσιολογικό τελεστή $A_f \in \mathcal{B}(H)$.

Δείξτε επίσης ότι όταν η f είναι συνεχής, τότε $A_f = f(A)$.

8. Δείξτε ότι κάθε αυτοσυζυγής τελεστής $A \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται στη μορφή $A = A_+ - A_-$ όπου οι A_+ και A_- είναι θετικοί τελεστές που ικανοποιούν $A_+ A_- = A_- A_+ = 0$ και μετατίθενται με τον A και μεταξύ τους.