Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις ΙΙΙ

1. Έστω H χώρος Hilbert με $\dim H > 1$.
Να βρεθεί ένας $T \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι φυσιολογικός.
Να βρεθεί ένας φυσιολογικός $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι αυτοσυζυγής.
Να βρεθεί ένας αυτοσυζυγής $A \in \mathcal{B}(H)$ που δεν είναι θετικός.
Να βρεθεί ένας $V \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $VV^* = I$, αλλά δεν είναι unitary.
Τι συμβαίνει αν επιπλέον ο V είναι 1-1;

2. Έστω H απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Έστω $a = (a(n))$ φραγμένη ακολουθία. Δείξτε ότι ο τελεστής $D_a \in \mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί $D_a e_n = a(n)e_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι θετικός τελεστής αν και μόνον αν $a(n) \geq 0$ για κάθε n.

Δείξτε απευθείας (δηλ. χωρίς τη χρήση του θεωρήματος ύπαρξης τετραγωνικής ρίζας) ότι τότε υπάρχει $S \in \mathcal{B}(H), S \geq 0$ ώστε $S^2 = D_a$ ο οποίος επιπλέον μετατίθεται με κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ που μετατίθεται με τον D_A.

3. Αν $f \in C([0,1])$, δείξτε ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $M_f \in B(L^2([0,1])$ είναι μη αρνητικός αν και μόνον αν $f(t) \geq 0$ για κάθε $t \in [0,1]$.

4. Αν H είναι χώρος Hilbert και $A \in \mathcal{B}(H)$, θεωρούμε τον τελεστή
$T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+Ay \\ A^*x+y \end{smallmatrix}\right]$, δηλαδή $T = \left[\begin{smallmatrix} I & A \\ A^* & I \end{smallmatrix}\right]$. να δειχθεί ότι $\|A\| \leq 1$ αν και μόνον αν ο T είναι θετικός.

5. Γενικότερα, θεωρούμε τον τελεστή $T \in \mathcal{B}(H \oplus H)$ με $T = \left[\begin{smallmatrix} X & Y \\ 0 & W \end{smallmatrix}\right]$. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ο T να είναι θετικός.

6. Αν $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, είναι αλήθεια ότι ο χώρος $T(H_1)$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H_2;

7. Έστω $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Να δειχθεί ότι $\overline{A(H_1)} = (\ker(A^*))^\perp$ και $\ker A = (A^*(H_2))^\perp$. Να βρεθεί ο $\ker(A^*A)$. Είναι αλήθεια ότι $(\ker A)^\perp = A^*(H_2)$; [Υπόδειξη: Εξετάστε τον τελεστή D_a στον ℓ^2, για κατάλληλη ακολουθία $a \in \ell^\infty$.]

8. Αν P, Q είναι δύο ορθές προβολές σ' έναν χώρο Hilbert, ισχύει η ισοδυναμία
$$(P \vee Q) + (P \wedge Q) = P + Q \iff PQ = QP.$$

9. Έστω (P_n) ακολουθία προβολών σ' έναν χώρο Hilbert H. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Οι P_n είναι ανά δύο κάθετες.

(ii) Η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει για κάθε $x \in H$ και $\|\sum_n P_n x\| \leq \|x\|$.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $\sum\limits_{n=1}^{m} P_n \leq I$, ισοδύναμα $\left\| \sum\limits_{n=1}^{m} P_n \right\| \leq 1$.

Τότε, για κάθε $x \in H$ η σειρά $\sum_n P_n x$ συγκλίνει στο $P(M)x$, όπου M είναι η κλειστή γραμμική θήκη της ένωσης των $\operatorname{im} P_n$ $(n \in \mathbb{N})$ και $\sum_n \|P_n x\|^2 = \|P(M)x\|^2$.

10. Αν $u \in H$ και $T = uu^*$, τότε ο T είναι φραγμένος θετικός τελεστής που έχει τάξη το πολύ 1. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

11. *(Προαιρετικά)* Έστω M, N κλειστοί υπόχωροι.

(α) Αν $\dim N < \infty$, δείξτε ότι ο $M + N$ είναι κλειστός.

(β) Αν $M \perp N$, τότε (Πυθαγόρειο) γνωρίζουμε ότι ο $M + N$ είναι κλειστός.

(γ) Αν $M = \{(x, 0) : x \in \ell^2\}$ και $N = \{(y, D_a y) : y \in \ell^2\}$ όπου $a(n) = \frac{1}{n}$, δείξτε ότι (οι M, N είναι κλειστοί αλλά) ο $M + N$ δεν είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell^2 \oplus \ell^2$ (Πρβλ. Ασκ. Ι.5).

(δ) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \ell^2 \oplus \ell^2$, αν $x_1 = P(M)x,\ x_{2n} = P(N)x_{2n-1}$ και $x_{2n+1} = P(M)x_{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$, η ακολουθία (x_n) τείνει στο 0.