Παρατηρήσεις στις Ασκήσεις ΙΙ

1. Αν E, F είναι χώροι με εσωτερικό γινόμενο και $u \in E, v \in F$ ορίζουμε γραμμική απεικόνιση

$$vu^* = \Theta_{u,v} : E \to F : x \to \langle x, u \rangle v$$

• Δείξτε ότι κάθε τέτοιος τελεστής είναι φραγμένος, και βρείτε τη νόρμα του.

• Δείξτε ότι ο συζυγής είναι ο $(vu^*)^* = uv^*$

• Βρείτε τη σύνθεση $(vu^*) \circ (wz^*)$. Πότε είναι =0?

• Όταν οι E, F είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι κάθε $T \in \mathcal{L}(E, F)$ γράφεται $T = \sum_{k=1}^{N} s_k v_k u_k^*$ όπου $s_k \in \mathbb{K},\ u_k \in E, v_k \in F$.

• Δείξτε ότι μπορώ τότε να επιλέξω την οικογένεια $\{u_1, \ldots, u_N\}$ ορθοκανονική στον E, ή την $\{v_1, \ldots, v_N\}$ ορθοκανονική στον F.

• Μπορώ να επιλέξω και τις δύο οικογένειες ορθοκανονικές;

Λύση [Σ.Π.] Έστω ότι $\dim E = n < \infty$ και $\{e_1, \ldots, e_n\}$ μια (οποιαδήποτε) ο.κ. βάση του E. Έστω $\{f_1, \ldots, f_m\}$ μια (οποιαδήποτε) ο.κ. βάση του $T(E) \subseteq F$ (οπότε $m \le n$). Έχουμε τότε, για κάθε $x \in E$,

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle T(e_j) \overset{(1)}{=} \sum_{j=1}^{n} \Theta_{Te_j, e_j}(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \sum_{i=1}^{m} \langle T(e_j), f_i \rangle f_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \langle T(e_j), f_i \rangle \langle x, e_j \rangle f_i \overset{(2)}{=} \sum_{i,j} \langle T(e_j), f_i \rangle \Theta_{e_j, f_i}(x) \end{aligned}$$

$$\text{άρα} \quad T = \sum_{i,j} a_{ij} \Theta_{e_j, f_i} \qquad \text{όπου } a_{ij} = \langle T(e_j), f_i \rangle\,.$$

Επομένως, αν ο χώρος E έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε μπορώ πάντα να γράψω τον T ως γραμμικό συνδυασμό τελεστών της μορφής Θ_{u_j, v_i}, όπου και οι δύο οικογένειες είναι ορθοκανονικές.

Παρατήρηση Το πλήθος των όρων στο τελευταίο άθροισμα είναι mn, όπου m είναι η τάξη του T. Η σχέση (1) δίνει $T = \sum\limits_{j=1}^{n} \Theta_{Te_j, e_j}$ με την $\{e_j\}$ ορθοκανονική. Αν την εφαρμόσουμε στον τελεστή T^* στον χώρο $T(E)$ (παρατηρώντας ότι ο T^* μηδενίζεται στον $T(E)^\perp$ (αφού $\langle T^* f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle = 0$ όταν $f \in T(E)^\perp$) έχουμε $T^* = \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_{T^* f_i, f_i}$, άρα $T = \sum\limits_{i=1}^{m} \Theta_{f_i, T^* f_i}$ με την $\{f_i\}$ ορθοκανονική.
Θα δούμε αργότερα, ως συνέπεια του φασματικού θεωρήματος, ότι υπάρχουν *κατάλληλες* ορθοκανονικές οικογένειες $\{u_j\} \subseteq E$, $\{v_j\} \subseteq F$ και θετικοί αριθμοί $s_1, \ldots s_m$ ώστε $T = \sum\limits_{j=1}^{m} s_j \Theta_{u_j, v_j}$ (όπου m η τάξη του T).

6. *Ο χώρος του Hardy H^2.*
Είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων που έχουν δυναμοσειρές με συντελεστές τετραγωνικά αθροίσιμους: $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ με $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 := \|f\|^2 < +\infty$. [1]
Δείξτε ότι ο $(H^2, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Hilbert. Για κάθε $z \in \mathbb{D}$, βρείτε μια $k_z \in H^2$ ώστε $f(z) = \langle f, k_z \rangle$.
Δείξτε ότι η απεικόνιση T που ορίζεται από τη σχέση $(Tf)(z) = zf(z),\ f \in H^2$ ορίζει φραγμένο τελεστή $T : H^2 \to H^2$ και βρείτε τον συζυγή του.

[1] Τέτοιες δυναμοσειρές έχουν ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1, επομένως ορίζουν συναρτήσεις ολόμορφες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Λύση [Σ.Π.] Αν $a = (a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ γράφουμε $f_a(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Η απεικόνιση

$$V : \ell^2(\mathbb{Z}_+) \to H^2 : a \to f_a$$

είναι, από τον ορισμό του H^2, ισομετρία επί. Επίσης, είναι γραμμική (οι δυναμοσειρές συγκλίνουν απόλυτα στον δίσκο, συνεπώς ισχύει ότι $f_{a+\lambda b} = f_a + \lambda f_b$). Άρα (όπως μάθαμε την Τρίτη) η V είναι unitary: $V^* = V^{-1}$. Έπεται ότι $\langle f_a, f_b \rangle_{H^2} = \langle Va, Vb \rangle_{H^2} = \langle a, b \rangle_2 = \sum_n a_n \bar{b}_n$. Κατά συνέπεια ο H^2 είναι χώρος Hilbert, αφού είναι γραμμικά και ισομετρικά ισόμορφος με έναν χώρο Hilbert.

Έπεται τώρα ότι, αν $z \in \mathbb{D}$, για να πετύχουμε $f(z) = \langle f, k_z \rangle$ για κάθε $f = f_a$ πρέπει $k_z = f_b$ όπου η b να ικανοποιεί

$$\sum_n a_n \bar{b}_n = f(z) = \sum_n a_n z^n$$

για κάθε $(a_n) \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$, άρα $\bar{b}_n = z^n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}_+$. Δείξαμε λοιπόν ότι αν

$$k_z(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{z^n} w^n = \frac{1}{1 - \bar{z}w}\,, \qquad w \in \mathbb{D}$$

τότε η $k_z \in H^2$ ικανοποιεί $f(z) = \langle f, k_z \rangle$ για κάθε $f \in H^2$.

Επίσης έχουμε, για κάθε $f = f_a \in H^2$,

$$z f_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k = f_c(z)$$

όπου $c = (0, a_0, a_1, \dots) = Sa$ (εδώ $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}_+))$ είναι ο τελεστής που ικανοποιεί $Se_n = e_{n+1}$). Δηλαδή $Tf_a = f_{Sa}$, ή ισοδύναμα $TV(a) = VS(a)$ για κάθε $a \in \ell^2(\mathbb{Z}_+)$. Συνεπώς $TV = VS$ άρα $V^*T^* = S^*V^*$ και άρα $T^*V = VS^*$. Έχουμε λοιπόν $(T^* f_a) = f_{S^* a}$ δηλαδή για κάθε $z \in \mathbb{D}$

$$(T^* f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (S^* a)_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots = \frac{f(z) - a_0}{z} = \frac{f(z) - f(0)}{z}\,.$$