Ασκήσεις Ι: κάποια σχόλια

5. *Έστω E, F κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in [0,1)$ ώστε $|\langle x, y\rangle| \le \lambda \|x\| \|y\|$ για κάθε $x \in E$ και $y \in F$. Δείξτε ότι ο υπόχωρος $E + F$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη Στην περίπτωση $\lambda = 0$ (δηλ. όταν οι E, F είναι κάθετοι ματαξύ τους, η απόδειξη ήταν η εξής: αν $z \in \overline{E+F}$ υπάρχει ακολουθία $(z_n) = (x_n + y_n)$ στον $E + F$ (δηλ. $x_n \in E, y_n \in F$) ώστε $z_n \to z$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι (x_n) και (y_n) συγκλίνουν μέσα στους E και F, και γι αυτό αρκεί να δειχθεί ότι είναι βασικές, αφού οι χώροι είναι πλήρεις. Μάλιστα, αρκεί να το δείξουμε για την (x_n) (αφού η (z_n) είναι βασική και $y_n = z_n - x_n$).

Αλλά οι E και F είναι κάθετοι μεταξύ τους, άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned} &\|z_n - z_m\|^2 = \|x_n - x_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 \ge \|x_n - x_m\|^2 \\ \text{άρα} \quad &\|x_n - x_m\| \le \|z_n - z_m\| \end{aligned}$$

πράγμα που δείχνει ότι η (x_n) είναι βασική, αφού η (z_n) είναι βασική.

Το κρίσιμο είναι η τελευταία ανισότητα. Και στη γενική περίπτωση, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $M < \infty$ ώστε $\|x\| \le M \|x + y\|$ για κάθε $x \in E$ και $y \in F$. Γιατί τότε από την ανισότητα $\|x_n - x_m\| \le M \|z_n - z_m\|$ θα συμπεράνουμε ότι όταν η (z_n) είναι βασική, το ίδιο ισχύει για την (x_n).

Από την υπόθεση $|\langle x, y\rangle| \le \lambda \|x\| \|y\|$ έχουμε $|\mathrm{Re}\langle x, y\rangle| \le \lambda \|x\| \|y\|$ για κάθε $x \in E$ και $y \in F$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2 &\ge \|x\|^2 - 2\lambda \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &\ge \|x\|^2 - \lambda(\|x\|^2 + \|y\|^2) + \|y\|^2 = (1-\lambda)(\|x\|^2 + \|y\|^2) \\ \text{άρα} \quad \|x+y\| &\ge \sqrt{1-\lambda}\, \|x\| \end{aligned}$$

δηλαδή $\|x\| \le M(\lambda) \|x + y\|$ όπου $M(\lambda) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\lambda}} < \infty$. [1]

11. *Αν $x_1, \ldots x_n$ είναι διανύσματα σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι ο πίνακας $(\langle x_i, x_j\rangle)$ έχει μη αρνητική ορίζουσα, η οποία μηδενίζεται αν και μόνον αν τα $x_1, \ldots x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. [Η περίπτωση $n = 2$ είναι ακριβώς η ανισότητα Cauchy-Schwarz.]*

Απόδειξη Ας ονομάσουμε $X \in M_n(\mathbb{K})$ τον πίνακα αυτόν. Για κάθε $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, έχουμε

$$0 \le \left\| \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i x_i \right\|^2 = \langle \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i x_i, \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j x_j \rangle = \sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j \langle x_i, x_j\rangle = \langle X\vec{\lambda}, \vec{\lambda}\rangle .$$

Τα $x_1, \ldots x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα ανν η τετραγωνική αυτή μορφή μηδενίζεται σε κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\lambda} \in \mathbb{K}^n$, δηλ. ανν υπάρχει $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ ώστε $\sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i x_i = 0$ δηλ. ανν τα $x_1, \ldots x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πράγματι, αν $X\vec{\lambda} = 0$ τότε $\langle X\vec{\lambda}, \vec{\lambda}\rangle = 0$ άρα $\sum\limits_{i=1}^n \bar{\lambda}_i x_i = 0$. Αντίστροφα αν $\sum\limits_{i=1}^n \bar{\lambda}_i x_i = 0$ τότε $\sum\limits_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \langle x_i, x_j\rangle = 0$ άρα $\sum\limits_{i=1}^n \langle x_j, x_i\rangle \lambda_i = 0$ για κάθε j δηλαδή $X\vec{\lambda} = 0$.

[1] Η ανισότητα $|\langle x, y\rangle| \le \lambda$ για κάθε $x \in E$ και $y \in F$ νόρμας 1 λέει ότι η "γωνία" θ μεταξύ των x και y φράσσεται μακριά απ' το μηδέν ($|\cos\theta| \le \lambda < 1$). Η ανισότητα αυτή είναι βεβαίως κενή περιεχομένου όταν $\lambda = 1$. Αποδεικνύεται ότι σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert μπορεί κανείς να βρει (απειροδιάστατους) κλειστούς υποχώρους που το άθροισμά τους δεν είναι κλειστό, επιλέγοντας διαδοχικά ζεύγη διανυσμάτων με όλο και μικρότερη γωνία.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $x_1, \dots x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και πρέπει να δείξουμε ότι $\det X \ge 0$. Αν $e_1, \dots e_n$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου $\text{span}\{x_1, \dots x_n\}$, κάθε x_i γράφεται $x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k$ (όπου $a_{ik} = \langle x_i, e_k \rangle \in \mathbb{K}$) και έχουμε

$$\langle x_i, x_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k, \sum_{r=1}^{n} a_{jr} e_r \rangle = \sum_{k,r} a_{ik} \overline{a_{jr}} \langle e_k, e_r \rangle = \sum_{k} a_{ik} \overline{a_{jk}} = \sum_{k} a_{ik} b_{kj}$$

όπου $b_{kj} = \overline{a_{jk}}$. Δηλαδή, $X = AB$ όπου $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$. Επομένως $\det X = \det A \det B$. Όμως, $\det B = \det B^T = \det[b_{ji}] = \det[\overline{a_{ij}}] = \overline{\det[a_{ij}]}$, άρα τελικά $\det X = \det A \det B = \det A \, \overline{\det A} \ge 0$.

12. *(*Προαιρετική*) Δείξτε ότι κάθε μιγαδικός γραμμικός χώρος F είναι γραμμικά ισομορφικός με έναν γραμμικό υπόχωρο ενός χώρου $\mathbb{C}^X$, όπου X κατάλληλο (όχι μοναδικό) σύνολο. Δηλαδή κάθε γραμμικός χώρος "είναι" χώρος συναρτήσεων.*

Απόδειξη Ας δούμε πρώτα την ειδική περίπτωση $\dim F = n < \infty$. Υπάρχει τότε μια (αλγεβρική) βάση: *επιλέγουμε μια,* έστω $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in F$ υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, που καθορίζονται μοναδικά από το x, ώστε $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Έτσι, σε κάθε $x \in F$ αντιστοιχεί η συνάρτηση $\hat{x} : \mathcal{E} \to \mathbb{C} : e_k \to \lambda_k$. Ελέγχεται εύκολα ότι η απεικόνιση $F \to \mathbb{C}^{\mathcal{E}} : x \to \hat{x}$ είναι γραμμική και 1-1 (στην περίπτωση $\dim F < \infty$ είναι και επί).

Για τη γενική περίπτωση: είναι γνωστό (συνέπεια του αξιώματος της επιλογής) ότι *κάθε* γραμμικός χώρος έχει μια αλγεβρική βάση: *επιλέγουμε μια,* έστω $\mathcal{E}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x \in F$ υπάρχει *πεπερασμένο πλήθος* $e_1, \dots e_{m_x} \in \mathcal{E}$ και αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_{m_x}$, που καθορίζονται μοναδικά από το x, ώστε $x = \sum_{k=1}^{m_x} \lambda_k e_k$. Έτσι, σε κάθε $x \in F$ αντιστοιχεί η συνάρτηση

$$\hat{x} : \mathcal{E} \to \mathbb{C} : \hat{x}(e) := \begin{cases} \lambda_k, & \text{αν } \exists k \in \{1, \dots, m_x\} : e = e_k, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ελέγχεται (ακριβώς όπως στην περίπτωση $\dim F < \infty$) ότι η απεικόνιση $F \to \mathbb{C}^{\mathcal{E}} : x \to \hat{x}$ είναι γραμμική και 1-1. (Δεν είναι όμως επί, όταν ο χώρος είναι απειροδιάστατος, διότι το σύνολο $\{\hat{x} : x \in F\}$ είναι ο χώρος $c_{00}(\mathcal{E})$ των συναρτήσεων με πεπερασμένο φορέα.

Η επιλογή του συνόλου X δεν είναι μοναδική. Για παράδειγμα, ο χώρος $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ αποτελείται από συναρτήσεις $x = (x(n)) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, δηλαδή είναι υπόχωρος του $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Επίσης όμως, εμφυτεύεται γραμμικά, όπως είδαμε, στον χώρο $\mathbb{C}^{\mathcal{E}}$ όπου $\mathcal{E}$ είναι μια *αλγεβρική* βάση[2] του ℓ^2. Τρίτη επιλογή: μπορεί κανείς να εμφυτεύσει γραμμικά τον ℓ^2 στον χώρο $\mathbb{C}^{\ell^2}$ όλων των συναρτήσεων $\ell^2 \to \mathbb{C}$, μέσω της απεικόνισης $x \to f_x$, όπου $f_x(y) = \langle x, y \rangle$.

13. *Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε*

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \text{dist}(x, F)^2$$

όπου $F = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Απόδειξη Θέτουμε $d := \text{dist}(x, F)$. Έστω $x \in E$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ ώστε

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\| < d + \varepsilon.$$

[2] η οποία δεν μπορεί να είναι (ισοπληθική με) το $\mathbb{N}$: αποδεικνύεται ότι ένας πλήρης χώρος με νόρμα δεν μπορεί να έχει αριθμήσιμη *αλγεβρική* βάση, όταν είναι απειροδιάστατος

Όμως, πάντα

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

(Λήμμα βέλτιστης προσέγγισης). Αλλά ξέρουμε (Πυθαγόρειο) ότι

$$\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 < (d+\epsilon)^2$$

$$\text{άρα} \quad \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < (d+\epsilon)^2 \,.$$

Αν $m \geq n$, έχουμε $\sum\limits_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \sum\limits_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$ και συνεπώς

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 < (d+\epsilon)^2$$

για κάθε $m \geq n$. Επομένως

$$\lim_m \left(\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \right) = d^2. \quad \square$$

Παρατήρηση. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε ότι η ακολουθία (x_m) (όπου $x_m = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k)_m$) *στοιχείων του* E συγκλίνει στον E, παρά μόνον ότι είναι βασική (διότι η $(|\langle x, e_k \rangle|)$ είναι τετραγωνικά αθροίσιμη και $\|x_m - x_r\|^2 = \sum_{k=r+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$).

Όταν λοιπόν ο E είναι χώρος Hilbert, τότε η (x_m) συγκλίνει, δηλ. η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο του $M := \overline{F}$ (γιατί τα μερικά αθροίσματα x_m ανήκουν στον F) και η σχέση

$$d^2 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq d^2$$

δείχνει ότι το $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι το διάνυσμα του M που είναι πλησιέστερο προς το x, συνεπώς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = P_M(x)$.

Άλλος τρόπος Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ συγκλίνει, μπορούμε να γράψουμε

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k + \left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right)$$

και παρατηρούμε ότι το $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ ανήκει στον M ενώ το $\left(x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \right)$ είναι κάθετο στον M (αφού είναι κάθετο σε κάθε e_k). Συνεπώς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k = P_M(x)$ από τη μοναδικότητα της διάσπασης $x = P_M(x) + x_\perp$ όπου $P_M(x) \in M$ και $x_\perp \in M^\perp$.

Έτσι έχουμε και μια λύση της άσκησης (7).