Γραμμικοί Τελεστές: Ασκήσεις I

1. Έστω E_1, E_2 υπόχωροι του $\mathbb{C}^n$ ώστε $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ και $E_1 + E_2 = \mathbb{C}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ γράφουμε $x = x_1 + x_2$ όπου $x_i \in E_i$. Αν $\|x_1\| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ (όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα), δείξτε ότι οι E_1, E_2 είναι κάθετοι.

2. Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $A \subseteq E$, να αποδειχθεί ότι $A^\perp = (\overline{[A]})^\perp$.

3. Έστω E γραμμικός χώρος και $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ απεικόνιση με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινόμενου εκτός της $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (ένα ημι-εσωτερικό γινόμενο).

Δείξαμε ότι $|\langle\langle x, y \rangle\rangle|^2 \leq \langle\langle x, x \rangle\rangle \langle\langle y, y \rangle\rangle \quad (x, y \in E)$.

(α) Αποδείξτε ότι το σύνολο $N = \{x \in E : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

(β) Στον χώρο πηλίκο E/N, ορίζουμε

$$\langle [x], [y] \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle \qquad x, y \in E$$

όπου $[x] = \{x + z : z \in N\}$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι (καλά ορισμένο) εσωτερικό γινόμενο στον E/N.

4. Έστω H χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $A \subseteq H$ μη κενό. Δείξτε ότι

1) $A^\perp$ κλειστός υπόχωρος του H και $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$.

2) Αν H Hilbert: $\quad A^\perp = \{0\} \iff \overline{\text{span}\, A} = H$.

3) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.

4) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$.

5) $A^\perp = A^{\perp\perp\perp}$.

6) Αν H Hilbert και E κλειστός γραμμ. υπόχωρος, τότε $\quad E = E^{\perp\perp}$.

7) Αν H Hilbert και E, F κλειστοί γραμμ. υπόχωροι με $E \perp F$, τότε $\quad E + F$ κλειστός.

5. Γενικότερα: Έστω E, F κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in [0, 1)$ ώστε $|\langle x, y \rangle| \leq \lambda \|x\| \|y\|$ για κάθε $x \in E$ και $y \in F$. Δείξτε ότι ο υπόχωρος $E + F$ είναι κλειστός.

6. Έστω H απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική βάση του H. Δείξτε ότι η $\{e_n\}$ δεν είναι αλγεβρική βάση του H. (Υπόδειξη: Αν το $x \in H$ είναι τέτοιο ώστε $\langle x, e_k \rangle \neq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (υπάρχουν πάντα τέτοια x;) τότε $x \notin \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$).

7. Δείξαμε ότι αν $\{e_n : n = 1, 2 \dots\} \subseteq E$ είναι ορθοκανονική οικογένεια σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενοκαι $x \in E$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

(i) $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (άρα $\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$).

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in [e_i : i = 1, \dots, n]$.

Δείξτε ότι η ισότητα $\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2$ ισχύει αν και μόνον αν $x \in \overline{F}$, όπου $F = [e_n : n = 1, 2 \dots]$.

8. Αν $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον χώρο Hilbert H και $M = \overline{\text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$, δείξτε ότι $P_M(x) = \sum_{k=1}^\infty \langle x, x_k \rangle x_k$ για κάθε $x \in H$.

9. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση
$$\phi : f \longrightarrow \int_{1/2}^{1} f(t)dt$$
είναι γραμμική μορφή στον $C([0,1])$ και ότι είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής, αλλά δεν υπάρχει *συνεχής* συνάρτηση g ώστε $\phi(f) = \langle f, g\rangle$ για κάθε $f \in C([0,1])$.

10. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $f \in C([0,1])$ να ισχύει η ανισότητα
$$\left|\int_0^1 tf(t)dt\right| \le C\left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$
Βρείτε την βέλτιστη (δηλ. την μικρότερη δυνατή) τιμή της C.

11. Αν $x_1, \dots x_n$ είναι διανύσματα σ' έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο, δείξτε ότι ο πίνακας $(\langle x_i, x_j\rangle)$ έχει μη αρνητική ορίζουσα, η οποία μηδενίζεται αν και μόνον αν τα $x_1, \dots x_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. [Η περίπτωση $n = 2$ είναι ακριβώς η ανισότητα Cauchy-Schwarz.]

12. (*Προαιρετική*) Δείξτε ότι κάθε μιγαδικός γραμμικός χώρος E είναι γραμμικά ισομορφικός με έναν γραμμικό υπόχωρο ενός χώρου $\mathbb{C}^X$, όπου X κατάλληλο (όχι μοναδικό) σύνολο. Δηλαδή κάθε γραμμικός χώρος "είναι" χώρος συναρτήσεων.

13. (*βελτίωση της (7)*) Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία στον E και $x \in E$. Τότε
$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \text{dist}(x, F)^2$$
όπου $F = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.