25/10/18

D πυκνός υπόχ. $(E, \| \ \|)$

$(F, \| \ \|)$ Banach

$T: D \to F$ γραμμ.

επεκτείνεται συνεχώς $\overline{T}: E \to F$

$\Updownarrow$

$\|T\| < +\infty$

Πρόταση H: Hilbert, M κλειστός υπόχωρος του H.

$$H = M \oplus M^{\perp}$$
$$\forall x = x_M + x_{\perp}$$

$$P_M : H \to H$$
$$x \to x_M$$ καλά ορισμένη γραμμική

Πρόταση $\|P_M(x)\| \leq \|x\|$ (+)

Απόδ. $x = x_M + x_{\perp}$

Πυθαγ: $\|x\|^2 = \|x_M\|^2 + \|x_{\perp}\|^2 \geq \|x_M\|^2 = \|P_M(x)\|^2$

Στην (+): sup ως προς $\|x\| \leq 1$

$\Longrightarrow \|P_M\| \leq 1$

Δηλ: $\|P_M\| = \sup\{\|P_M(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq 1$

Όταν $M \neq \{0\}$: $\forall x \in M$ $P_M(x) = x$

$\|P_M(x)\| = \|x\|$

$\Downarrow$

$\|P_M\| \geq 1$ $\Rightarrow$ ισότητα

Η P_M έχει νόρμα $= 1$ όταν $M \neq \{0\}$

Πρόζ Αν H (Hilbert) έχει ορθοκανονική βάση $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ νδο ισομ. ισομ. με το ℓ^2

μάλιστα, η απεικόνιση

$$x_n \longrightarrow e_n \quad \forall n$$

επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία

$$H \longrightarrow \ell^2 \quad (\text{επί})$$

<u>Απόδ</u> (i) "επεκτείνω γραμμικά" δηλ. ορίζω

$$U_0 : \underbrace{\operatorname{span}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}}_{= H_0} \longrightarrow \underbrace{\operatorname{span}\{e_n : n\in\mathbb{N}\}}_{= c_{00}(\mathbb{N})}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

καλά ορισμένη, γραμμική, 1-1 και επί

πυκνό στον H πυκνός στο ℓ^2

(ii) αρκεί νδο U_0 και ο U_0^{-1} είναι φραγμ.

$\forall x\in H_0$,

$$x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle x_n$$

$$U_0(x) = \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle e_n = \begin{bmatrix} \langle x,x_1\rangle \\ \langle x,x_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x,x_N\rangle \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\|U_0(x)\|_2^2 = \sum |\langle x,x_n\rangle|^2 = \|x\|^2$$

U_0 είναι φραγμ. (μάλιστα ισομετρία)

U_0^{-1} "   "   "   "

Άρα,

η U_0 επεκτείνεται σε φραγμ. $U : H \to \ell^2$

και η U_0^{-1} "   "   " $V : \ell^2 \to H$

και ισχύει $V\circ U\big|_{H_0} = Id_{H_0}$

και

$U\circ V\big|_{c_{00}} = Id_{H_0}$

άρα: $V = U^{-1}$

κάθε γραμμική απεικόνιση $T : (E, \| \ \|) \to (F, \| \ \|)$ όταν $\dim E < +\infty$

είναι φραγμένη

Απόδ (όταν η $\| \cdot \|_E$ προέρχεται από $\langle \cdot , \cdot \rangle$):

Έστω $\{e_1 \dots e_N\}$ ο.κ. βάση για E

$$\forall x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i$$

$$\Downarrow \ T \text{ γραμμική}$$

$$Tx = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\langle x, e_i \rangle}_{\in \mathbb{K}} \underbrace{Te_i}_{\in F}$$

$$\|Tx\|_F \overset{(\text{τριγ})}{\leq} \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i \rangle| \, \|Te_i\|_F$$

$$\overset{(CS)}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i \rangle|^2 \right)^{1/2}}_{= \|x\|_E} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \|Te_i\|^2 \right)^{1/2}}_{M}$$

$\forall x, \quad \|Tx\| \leq M \|x\|$ όπου M

$$\Downarrow$$

T φραγμ και $\|T\| \leq \left(\sum_{i=1}^{N} \|Te_i\|_F^2 \right)^{1/2}$

ισότητα;

Ας υποθέσω ότι $\dim F = m < +\infty$ και ότι $\| \ \|_F$ προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο και επιλέγω μια ον. βάση για F $\{f_i\}$ τότε:

$$T \rightsquigarrow [a_{ij}] \text{ όπου } a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$$

οπότε

το Te_j = η j-στήλη του $[a_{ij}]$

άρα: $$\|Te_j\|_F^2 = \sum_{i=1}^{m} \|a_{ij}\|^2$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{N} \|Te_j\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} \|a_{ij}\|^2 \right)^{1/2}$$

παράδ.:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Ειδική περίπτωση:

διαγώνιος πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow D$$

Τότε $\|D\| = \max_{i} |a_{ii}| \leq \sqrt{\sum |a_{ii}|^2}$

όχι ισότητα

Ισχυρ. ότι $D : \overset{\ell^2}{\cancel{(\mathbb{C}^n, \|\ \|_2)}} \longrightarrow \overset{\ell^2}{\cancel{(\mathbb{C}^n, \|\ \|)}}$

$$D(e_j) = a(j)\, e_j \quad , \quad j = 1, \dots, \cancel{n}$$

διότι $\quad D \sim \begin{bmatrix} a(1) & & \\ & \ddots & \\ & & a(n) \end{bmatrix} \ddots$

$$\forall x = \sum_i^{\infty} \langle x, e_i \rangle e_i$$

$$D(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle\, a(i)\, e_i$$

$$\|D(x)\|_2^2 = \sum^{\infty} |\langle x, e_i \rangle\, a(i)|^2$$

$$\leq \Big(\overset{\sup}{\cancel{\max}} |a(i)|^2\Big) \Big(\sum_i |\langle x, e_i \rangle|^2\Big)$$

$$\leq \|a\|_\infty^2 \, \|x\|_2^2$$

Επίσης,

$$D(e_i) = a(i)\, e_i$$

$$\Rightarrow \|D(e_i)\| = |a(i)| \quad \forall i$$

$$\|D\| = \|D\| \, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\|e_i\|}} \overset{(*)}{\geq} \|D(e_i)\| \geq |a(i)| \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \|D\| \geq \max |a(i)| = \|a\|_\infty \checkmark$$

$$\boxed{\text{άρα} \quad \|D\| = \|a\|_\infty}$$

$(*)$:

$$\forall x, \ \|D(x)\| \leq \|D\| \, \|x\|$$

$$\|D\| \, \|x\| \geq \|D(x)\|$$

Έστω (a_n) μια $\boxed{\text{μη φραγμ}}$ ακολουθία. Ν.δ.ο. η απεικόνιση

$$(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow (a_n x(n))_n$$

δεν στέλνει $\forall x = x(n)) \in \ell^2$ μέσα στο ℓ^2

Απόδ

Αφού (a_n) όχι φραγμ, $\forall N \in \mathbb{N}$ $\exists k_N \in \mathbb{N}$ ώστε $\underline{|a_{k_N}| > N}$

Παίρνε:

$$x(k) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & k = k_N \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

τότε

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 = \sum_{N=1}^{\infty} |x(k_N)|^2 = \sum_N \frac{1}{N^2} < +\infty$$

άρα $x \in \ell^2$

όμως $(a_k x(k)) \notin \ell^2$

διότι

$$a_k x(k) = \begin{cases} 0, & k \neq k_N \\ a_{k_N}/N & k = k_N \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|(a_k x(k))_k\|_2^2 = \sum_k |a_k x(k)|^2$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} \left|a_{k_N} \frac{1}{N}\right|^2$$

$$> \sum_{N=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

∎

Έστω: $k \in C([a,b]\times[a,b])$

$\forall f \in C([a,b])$

$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y) f(y)\,dy$ ορίζεται,

γιατί $\forall x \in [a,b]$ η $y \mapsto k(x,y) f(y)$
συνεχής, άρα ολοκληρώσιμη

<u>Ισχ</u>

Kf συνεχής σε $[a,b]$

$$(Kf)(x) - (Kf)(x') = \int_a^b \big(k(x,y) - k(x',y)\big) f(y)\,dy$$

Όμως, k <u>ομοιόμορφα</u> συνεχής, άρα

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|(x,y) - (x',y')\| < \delta$$

$$\Downarrow$$

$$|k(x,y) - k(x',y')| < \epsilon$$

άρα, αν $|x - x'| < \delta$

$$\Downarrow$$

$$|k(x,y) - k(x',y)| < \epsilon \quad \forall y \in [a,b]$$

$$\Downarrow \int \quad f(y)\,dy$$

$$\int_a^b |k(x,y) - k(x',y)|\,|f(y)|\,dy \le \epsilon \int_a^b |f(y)|\,dy$$

$\Longrightarrow$ Kf συνεχής στο $[a,b]$

άρα $\square$ και ολοκληρώσιμη

$$\int |Kf(x)|^2\,dx < +\infty$$

όπου ο K ορίζεται καλά, και είναι γραμμ.

$$K : (C[a,b], \| \ \|_2) \to (C[a,b], \| \ \|_2)$$

φραγμ.?

ψάχνω M ώστε

$$\|Kf\|_2 \le M \|f\|_2 \quad \forall f \in C[a,b]$$

ιδέα $M \overset{?}{=} \left(\iint |k(x,y)|^2 \, dx \, dy\right)^{1/2}$

$\forall x \in [a,b]$ $$|(Kf)(x)| \le \int |k(x,y) f(y)| \, dy \overset{CS}{\le} \left(\int |k(x,y)|^2 dy\right)^{1/2} \underbrace{\left(\int |f(y)|^2 dy\right)^{1/2}}_{= \|f\|_2}$$

δηλαδή:

$$|Kf(x)|^2 \le \|f\|_2^2 \int_a^b |k(x,y)|^2 dy$$

άρα

$$\int |(Kf)(x)|^2 dx \le \|f\|_2^2 \int_a^b \left(\int_a^b |k(x,y)|^2 dy\right) dx$$

δηλαδή:

$$\|Kf\|_2 \le \|f\|_2 \left(\iint |k(x,y)|^2 dy \, dx\right)^{1/2}$$

άρα K φραγμ. και $\|K\| \le \left(\iint |k(x,y)|^2 dy \, dx\right)^{1/2}$

επομένως επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή

$$K : L^2([a,b]) \to L^2([a,b]).$$

∎