Γραμμικές Απεικονίσεις

23/10/18

$ST : E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$

$ST \rightsquigarrow [c_{ij}] \qquad c_{ij} = \sum_{l} a_{il} b_{lj}$

$$\mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G) \longrightarrow \mathcal{L}(E,G)$$
$$(T, \quad S) \longrightarrow ST$$

ειδικότερα: $E = F = G$

$$\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(T, S) \longrightarrow ST$$

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$: δακτύλιος + γραμμ. χώρος
= άλγεβρα
ισομορφική
με την
$M_n(\mathbb{K})$
||
$n \times n$ πίνακες

$$E \xrightarrow{T} F \qquad T \sim [a_{ij}]$$

θεωρώ τον πίνακα $[b_{ij}] := [\bar{a}_{ji}]$

"ανάστροφος συζυγής"

ορίζει

$$F \xrightarrow{T^*} E$$

ικανοποιεί

$$a_{ij} = \langle Te_j, f_i \rangle$$

άρα $\quad a_{ji} = \langle Te_i, f_j \rangle$

οπότε $\quad b_{ij} = \bar{a}_{ji} = \overline{\langle Te_i, f_j \rangle} = \underline{\langle f_j, Te_i \rangle}$

ο πίνακας $[b_{ij}]$ ορίζει $T^* : F \to E$

ως εξής

$$\langle T^* f_j, e_i \rangle = b_{ij}$$

$$\langle T^* f_j, e_i \rangle = \langle f_j, Te_i \rangle \qquad \forall i \ \forall j$$

$$\Downarrow$$

$$\langle T^* f, e \rangle = \langle f, Te \rangle \qquad \forall e \in E, \ \forall f \in F$$

$$T \in L(E,F) \longrightarrow T^* \in L(F,E)$$

όταν $E = F$ έχω εσωτερική πράξη

$$L(E) \longrightarrow L(E)$$

$$T \longrightarrow T^* \qquad !!!$$

Παραδείγματα γρ. απεικονίσεων

(E, F : χώροι με εσωτ. γινόμενο, πεπ. διάσταση)

$u \in E, \quad v \in F$

$$T : E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto \langle x, u\rangle v \qquad : \operatorname{rank}(T) \leq 1$$

$= 1$ αν $u \neq 0 \neq v$

$$T = vu^* = v \otimes u^*$$

$$\equiv |v\rangle\langle u| \leftarrow \text{Dirac}$$

<u>Ασκήσεις</u>

- $E \times F \longrightarrow \mathcal{L}(E,F)$

  $(u, v) \longrightarrow vu^*$

  γραμμική ως προς v

  αντιγραμμική ως προς u

- $(vu^*)^* = uv^*$

- $(uv^*)\circ(wz^*) = ?$

  $= 0$ πότε

- Κάθε $T \in \mathcal{L}(E,F)$ γράφεται

  $$T = \sum_k s_k(T)\, v_k u_k^*$$

  $s_k(T) \in \mathbb{K}$, $\quad u_k \in E, v_k \in F$

- Μπορώ να επιλέξω τα $\{u_k\}$ ορθοκανονική

  ή τα $\{v_k\}$ ορθοκανονική

- Και τα δύο;

  δηλ. $\forall\, T \in \mathcal{L}(E,F)$

  $\exists ?\ s_k(T) \in \mathbb{K}$

  και δύο ορθοκανονικές

  ακολουθίες $\{u_k\} \subseteq E$

  $\{v_k\} \subseteq F$

  ώστε $T = \sum_k s_k(T)\, v_k u_k^*$

  $\operatorname{rank}(T) = ?$

$T : (E, \| \|_E) \longrightarrow (F, \| \|_F)$ γραμμική

- αν είναι συνεχής σε ένα σημείο τότε είναι συνεχής στο 0

Απόδ. Έστω T συνεχής στο $x \in E$ και έστω (u_n) του E : $u \to 0$ ν.δ.ο. $T(u_n) \longrightarrow 0$

όμως: $u_n + x \longrightarrow x$

$\Downarrow$ (από υπόθ)

$T(u_n + x) \longrightarrow T(x)$

$\Downarrow$

$T(u_n) + \cancel{T(x)} \longrightarrow \cancel{T(x)}$

δηλ. $T(u_n) \longrightarrow 0$

- Αν είναι συνεχής στο $0 \in E$ τότε $\exists M < +\infty$: $\|Tx\| \leq M\|x\|$ $\forall x \in E$

Απόδ. Για $\epsilon = 1$ $\exists \delta > 0$:

$\|x\| < \delta \Longrightarrow \|Tx\| < 1$

οπότε $\forall y \in E$ καλούμε $x = \frac{y}{\|y\|} \frac{\delta}{2}$

$y \neq 0$

$\Rightarrow \|x\| < \delta$

άρα $\|Tx\| < 1$

δηλαδή

$\left\| T\left(\frac{\delta}{2\|y\|} y\right) \right\| < 1$

$\Rightarrow \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| < 1$

$\Rightarrow \|Ty\| < \frac{2}{\delta} \|y\|$ $\forall y \neq 0$

προφανώς ισχύει και για $y = 0$

M

$\forall x$ $\|Tx\| \leq M\|x\|$

• Αν $T|_{B_E}$ είναι φραγμ. νδο T ομοιομ. συνεχής

$(B_E=\{x\in E : \|x\|\le 1\})$

$\Downarrow$

$$\sup\{\|Tx\|_F : \|x\|_E \le 1\} < +\infty$$

$$\| \\ \|T\|$$

οπότε έχω $\|Tx\| \le \|T\|$ $\forall x\in E$ με $\|x\|_E \le 1$

οπότε $\forall y \in E,\ y\neq 0$

$$\left\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \le \|T\|$$

$\Longrightarrow$ $\|Ty\| \le \|T\|\,\|y\|$ $\forall y\neq 0$. και για $y=0$

$\Longrightarrow$ $\forall x,y\in E$

$$\|Tx-Ty\| = \|T(x-y)\| \le \|T\|\,\|x-y\|$$

$\forall \varepsilon>0$ μπορώ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\|T\|} > 0$ ώστε

$\forall x,y \in E$ με $\|x-y\|<\delta$

να έχω

$$\|Tx-Ty\| \le \|T\|\frac{\varepsilon}{2\|T\|} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

: ομοιόμορφη συνέχεια

$(E, \| \ \|) \qquad\qquad (F, \| \ \|)$

$\cup\!|$

D : "καλός" γραμμ/υπόχωρος, $\overline{D} = E$

(π.χ. $C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$

$c_{00} \subseteq \ell^2$

Δίνεται

$T : D \longrightarrow F$ γραμμική

$\exists ?\ \tilde{T} : E \to F$ γραμμ + συνεχής επέκταση

παρ : $F \subseteq \hat{F}$: πλήρωση του F

$T : D \longrightarrow F \hookrightarrow \hat{F}$

άρα μπορώ να υποθέσω χωρίς βλάβη ότι F είναι Banach

Απο

Αν η T δέχεται συνεχή επέκταση
$\tilde{T}: E \to F$
τότε ασφαλώς η $T = \tilde{T}|_D$ είναι συνεχής.

Επίσης, δεν υπάρχει άλλη επέκταση διότι αν
$S: E \to F$ συνεχής
και $S|_D = T$ τότε οι S και $\tilde{T}$ είναι συνεχείς στο E και ταυτίζονται σ' ένα πυκνό, άρα είναι ίσες.

(αφού $\forall x \in E \ \exists (x_n)$ στο D $x_n \to x$
οπότε
$Sx = \lim Sx_n = \lim \tilde{T} x_n = \tilde{T} x$)

Το ουσιώδες μέρος της απόδ:

Υποθέτω $T: D \to F$ συνεχή γραμμ.
νδο $\exists$ επέκταση $\tilde{T}: E \to F$

Έστω $x \in E$ να ορίσω $\tilde{T}(x)$

$\exists (x_n)$ στο D : $\|x_n - x\|_E \to 0$

Θέλω: $\tilde{T}(x) = \lim Tx_n$

Δύο προβλήματα:

(i) συγκλίνει η (Tx_n) ;

(ii) καλά ορισμένη $\tilde{T}$

αν (x_n') στο D με $x_n' \to x$

$\lim Tx_n' \overset{?}{=} \lim Tx_n$;

Πρώτο

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \le \|T\| \, \|x_n - x_m\| \quad (*)$$

Όμως (x_n) βασική, άρα από την $(*)$ η (Tx_n) βασική
και συνεπώς συγκλίνει (αφού F πλήρης!)

Θέτω $\tilde{T}x = \lim_n Tx_n$

Αν (x_n') στο D ώστε $x_n' \to x$

τότε

$$\|Tx_n - Tx_n'\| \le \|T\| \, \|x_n - x_n'\| \to 0$$

και

$$\|\tilde{T}x - Tx_n'\| \le \|\tilde{T}x - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx_n'\|$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow 0 \qquad\qquad \downarrow 0$$

άρα:

$$\lim Tx_n' = \tilde{T}x$$

Προσοχή $\tilde{T}|_D = T$ (επειδή ... αν $x \in D$ παίρνω $x_n = x$ τότε $Tx_n \to Tx$)

Είναι άραγε γραμμικός;

$$\tilde{T}(x+\lambda y) \overset{?}{=} \tilde{T}(x) + \lambda \tilde{T}(y) \quad \forall x, y \in E, \lambda \in \mathbb{K}$$

παίρνω (x_n) στο D $x_n \to x$

(y_n) στο D $y_n \to y$

$\Rightarrow (x_n + \lambda y_n)$ στο D $x_n + \lambda y_n \to x + \lambda y$

και έχω:

$$\tilde{T}(x+\lambda y) = \lim_n T(x_n + \lambda y_n) = \lim_n \left(T(x_n) + \lambda T(y_n) \right)$$

$$= \lim_n T(x_n) + \lambda \lim_n T(y_n) = \tilde{T}(x) + \lambda \tilde{T}(y)$$

Ισχ. $\|\tilde{T}\| = \|T\|$

έχω $\forall x \in D$

$$\|\tilde{T}x\| = \|Tx\| \le \|T\| \, \|x\|$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\|\tilde{T}y\| \le \|T\| \, \|y\| \quad \forall y \in E}$$

διότι $\|\tilde{T}y\| = \lim \|T(y_n)\|$

$\forall (y_n)$ του D με $y_n \to y$

αλλά $\|Ty_n\| \le \|T\| \, \|y_n\|$

$$\downarrow$$

$$\|T\| \, \|y\|$$

άρα $\|\tilde{T}y\| \le \|T\| \, \|y\|$

άρα $\|\tilde{T}\| \le \|T\|$

όμως, $\|\tilde{T}\| = \sup\{ \|\tilde{T}x\| \; \|x\|_E \le 1, x \in E\}$

$\ge \sup\{ \|\tilde{T}x\| \; \|x\|_E \le 1, x \in D\}$

$= \sup\{ \|Tx\| \quad " \quad " \} = \|T\|$

$\|\tilde{T}\| \ge \|T\|$: άρα ισότητα. ∎

Προς Πολλ/σιαστικοί Τελεστές :

$$D = (C([a,b]), \|\ \|_2)$$

$$E = (L^2([a,b]), \|\ \|_2) = F$$

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ συνεχής

ορίζω: $M_f^0 : D \to F$

$g \mapsto fg$ καλά $\left(fg(t) = f(t)g(t)\ \forall t \in [a,b] \right)$

διότι fg συνεχής

άρα $fg \in F$

Επίσης $M_f^0(g_1 + \lambda g_2) = f \cdot (g_1 + \lambda g_2)$

$= fg_1 + \lambda f g_2$

$= M_f^0(g_1) + \lambda M_f^0(g_2)$

και M_f^0 είναι γραμμ. ως προς $\|\ \|_2, \|\ \|_2$

$\forall g \in D$:

$$\|M_f^0 g\|_2^2 = \int_a^b \left| (M_f^0(g))(t) \right|^2 dt$$

$$= \int_a^b |f(t)\, g(t)|^2 dt$$

όμως, $|f(t)| \le \sup\{|f(t)| : t \in [a,b]\}$

$= \|f\|_\infty$

$\Downarrow$

$$\|M_f^0 g\|_2^2 \le \|f\|_\infty^2 \int_a^b |g(t)|^2 dt$$

$$\|M_f^0(g)\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2 \quad \forall g \in D$$

άρα M_f^0 είναι φραγμ., $\|M_f^0\| \le \|f\|_\infty$

άρα $\exists!$ επέκταση

$$M_f : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$$

με

$$\|M_f\| = \|M_f^0\| \le \|f\|_\infty$$

$\uparrow$

$=$ άσκηση