11 Οκτ 18

F κλειστός υπόχωρος, $u \notin F$

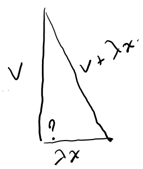
$$C = u + F = \{u + x : x \in F\}$$

$$\exists!\ v \in C : \|v\| = \inf\{\|y\| : y \in C\} = \inf\{\|u - x\| : x \in F\} = \operatorname{dist}(u, F)$$

Ισχ $v \perp F$

Απόδ ΝΔΟ $\forall x \in F$ ότι $x \perp v$

Όμως $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\|v + \lambda x\| \geq \|v\|$



$$\iff \langle v + \lambda x, v + \lambda x \rangle \geq \|v\|^2$$

$$\iff \|v\|^2 + \langle v, \lambda x \rangle + \langle \lambda x, v \rangle + \|\lambda x\|^2 \geq \|v\|^2$$

Μπορώ να υποθ. ότι $\langle x, v \rangle \geq 0$ (αντικαθ. το x με $e^{i\theta}x$), οπότε

$$\iff \|v\|^2 + 2\lambda |\langle x, v \rangle| + \lambda^2 \|x\|^2 \geq \|v\|^2$$

$$\lambda = -1/n$$

$$\iff$$

$$-\frac{2}{n} |\langle x, v \rangle| + \frac{1}{n^2} \|x\|^2 \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longleftarrow \quad -2|\langle x, v \rangle| + \frac{1}{n} \|x\|^2 \geq 0 \quad ''$$

$$\Downarrow$$

$$|\langle x, v \rangle| = 0$$

ΟΝ βάση στο E (i) $\{e_i : i \in I\}$ ορθοκανονικό

και (ii) $\text{span}\{e_i\}$ πυκνός στο E

<u>Δηλ</u>

$$\forall x \in E \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists\, x_\epsilon \in \text{span}\{e_i : i \in I\}$$

$$\|x - x_\epsilon\| < \epsilon$$

x_ϵ πεπερασμένο (!) $\quad x_\epsilon = \sum_{n=1}^{n_\epsilon} \lambda_n e_n$

$$\left\| x - \sum_{n=1} \lambda_n e_n \right\| < \epsilon$$

<u>Ισχ</u> μπορώ $\quad \lambda_n = \langle x, e_n \rangle$

$(E, \langle , \rangle)$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική

$K = \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

$\forall x \in E \qquad \mathrm{dist}(x, K) = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$

(είδαμε, $\|x\|^2 = \sum^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ ισχύει ανν $x \in \overline{K}$)

<u>Παρατ</u> (i) $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{N} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 \quad \text{(Bessel)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \le \|x\|^2 \qquad ''$$

$$\Downarrow$$

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \ge 0$$

$$\overset{\text{(*)}}{=} 0 \quad \text{ανν} \quad x \in \overline{K}$$

Όταν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθ. βάση του E, τότε

$$\forall x \in E : \text{(i)}\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

<u>δηλ.</u>

αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$ τότε η (s_n) <u>συγκλίνει</u> ως προς την $\| \ \|$ του E

$$\lim_n s_n = x$$

$$\text{(ii)}\ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

<u>Πόρισμα</u> $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$

<u>Απόδ.</u> Ξέρω

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle \ \text{''}\ , y \rangle$$

$$\langle x, y \rangle = \Big\langle \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle e_n, y \Big\rangle$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle \langle x, e_n \rangle e_n, y \rangle$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}$$

$(E, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ με εσωτ. γινόμενο διαχωρίσιμος

ν.δ.ο. $\exists \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ο.κ. βάση του E

<u>Απόδ.</u> διαχ $\iff \exists \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = X$ αριθμήσιμο πυκνό στο E

$\forall N \in \mathbb{N}$ $\{x_1 .. x_N\}$ $\exists k_N \leq N$ τ.ω.

$\{x_1 .. x_{k_N}\}$ γραμμ. ανεξ. και παράγουν τον $\operatorname{span}\{x_1 .. x_N\}$

οπότε έχω κτίσει $Y = \{y_1 .. y_n, ..\}$ γραμμ. ανεξ.

με $\operatorname{span} Y = \operatorname{span} X$

$Y \longrightarrow$ (gram-schmidt) $\longrightarrow \{e_1, e_2 ..\}$

ορθοκανονικά

ώστε $\overline{\operatorname{span}\{e_1 .. e_n ..\}} = \overline{\operatorname{span} Y} = \overline{\operatorname{span} X} \supseteq \overline{X} = E$

δηλ. $\{e_1, e_2 ..\}$ είναι ορθοκανονική βάση του E

Βελτίωση E : διαχωρίσιμος

F : γραμμ. υπόχωρος πυκνός στον E

τότε $\exists$ ON βάση $\{e_1, e_2, \dots\}$ του E

μέσα στον F

Απόδ. Εφαρμόζω το προηγούμενο και το F

(είναι διαχ. Γιατί;)

Μπορώ να βρω $\{e_1, e_2, \dots\}$ ON ακολουθία

μέσα στον F που είναι ON βάση του F

Έστω $x \in E$ νδο $x \in \overline{\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_i, \dots\}}$

Μου δίνετε ένα $\varepsilon > 0$

βρίσκω πρώτα $x_\varepsilon \in F$: $\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon/2$

ότι ξέρω

άρα $\exists$ $y \in \operatorname{span}\{e_1, e_2, \dots\}$

$\|x_\varepsilon - y\| < \varepsilon/2$

$\Longrightarrow$

$$\|x - y\| \le \|x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - y\| < \varepsilon$$

Πρόταση. Γνωστό: $C_p([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ συνεχής κ $f(0) = f(2\pi)\}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $(L^2([0,2\pi]), \| \|_2)$

Γνωστό (Θεώρημα Fejer) ο χώρος $\mathcal{P}$ των τριγ. πολ. $\mathcal{P} = \mathrm{span}\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$

$f_n(t) = e^{int} = \cos nt + i \sin nt$

είναι πυκνός στον $(C_p[0,2\pi], \| \|_\infty)$

Πρόταση. $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ο.κ. βάση του $L^2([0,2\pi])$

Απόδ. (i) Έστω $f \in L^2$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει $g \in C_p([0,2\pi])$ ώστε

$$\|f - g\|_2 < \epsilon/2$$

(ii) Fejer: $\exists$ τριγ. πολ. $p \in \mathrm{span}\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ώστε

$$\|g - p\|_\infty < \epsilon/2$$

πόσο κάνει το $\|g - p\|_2$;

$$\|g - p\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t) - p(t)|^2 \, dt$$

$$\leq \frac{1}{\cancel{2\pi}} \sup_t |g(t) - p(t)|^2 \, \cancel{2\pi} = \|g - p\|_\infty^2 < (\epsilon/2)^2$$

$\Downarrow$

$$\|f - p\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 < \epsilon$$

Από τη Θεωρία των χώρων Hilbert:

$$\forall g \in C_p[0,2\pi]$$

υπάρχει

$$g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) f_n \quad (\text{ως προς } \| \|_2)$$

όπου $\hat{g}(n) = \langle g, f_n \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} \, dt$

Η ισότητα αυτή σημαίνει εξ ορισμού: $\displaystyle\int \Big| g(t) - \sum_{n=-N}^{N} \hat{g}(n) e^{int} \Big|^2 \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

(κι όχι $S_N(t) \to g(t)$ για κάθε t)

$(E, \| \|) \to (\ell^2, \| \|_2)$

$U_0 : x \longrightarrow (\langle x, e_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ γραμμ

ισομετρική!

$\|U_0 x\|_2^2 \overset{\text{ορ}}{=} \sum |\langle x, e_n \rangle|^2$

$\| \text{Parseval}$

$\|U_0 x\|_2 = \|x\|_E \Longleftarrow$ $\|x\|^2$

και το: $U_0(E) \supseteq c_{00}(\mathbb{N})$

γιατί; αν $(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{s(2)}, 0, \dots) \in c_{00}$

θέτω: $x = \sum_{n=1}^{s(2)} \lambda_n e_n \in E$

$\Downarrow$

$U_0 x = (\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_{s(2)})$

$\Downarrow$

$\overline{U_0(E)} = \ell^2$

$U_0 : (E, \| \|) \longrightarrow (\ell^2, \| \|_2)$

$\uparrow$ ισομετρία

πλήρης μ.χ.

αν είναι επί

τότε

$\Rightarrow$

$(E, \| \|)$ πλήρης

Αντίστροφα, υποθέτω ότι ο E είναι χώρος Hilbert. Νδο ότι τότε η U_0 είναι επί:

<u>Απόδ</u> Αυθαίρετο $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$

να βρω $x \in E$: $U_0(x) = \lambda$

δηλ. $\langle x, e_n \rangle = \lambda_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Προφανώς, (??)

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$

διότι

$U_0(x) = (\langle x, e_n \rangle) = (\lambda_n)$

διότι

Σωστό;;

$\langle x, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle e_n, e_k \rangle = \lambda_k$

Αρκεί να δείξω ότι

η σειρά $\sum \lambda_n e_n$ συγκλίνει!! στον E

Προσέχουμε ότι $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

ν.δ.ο. (S_n) βασική

$n \geq m$

$$S_n - S_m = \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k e_k$$

$\|S_n - S_m\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2$ όμως, από την υπόθ

η (λ_k) είναι $\square$ικά αθροίσιμη, άρα αν μου δώσουν $\epsilon > 0$ $\exists \nu_0$: $\forall n, m$ με $m \geq \nu_0$, $n \geq m$

$$\sum_{k=m+1}^{n} |\lambda_k|^2 < \epsilon^2$$

άρα (S_n) είναι βασική ως προς τη $\| \ \|_E$

άρα ξέρω ότι S_n συγκλίνει

πού; στο $\sum^{\infty} \lambda_k e_k$

Μοναδικότητα της πλήρωσης:

$$E \xrightarrow{\varphi} H \leftarrow \text{Hilbert}$$

γραμμ. ισομ. με πυκνή εικόνα

$$E \xrightarrow{\psi} K \quad ''$$

Θέτω

$$H \supseteq \varphi(E) \xrightarrow{\varphi^{-1}} E \xrightarrow{\psi} \psi(E) \subseteq K$$

είναι γραμμ. ισομετρίες επί

$T_0 : \varphi(E) \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \psi(E)$ 1-1 και επί και ισομετρία

$\Downarrow$

Επεκτείνεται (θα δείξουμε αργότερα)* σε γραμμ. ισομετρία

$$T : \overline{\varphi(E)} \longrightarrow \overline{\psi(E)} \quad \text{επί}$$

και έχει την ιδιότητα

$\forall x \in E \quad T(\varphi(x)) = \psi(x)$

διότι $T(\varphi(x)) = T_0(\varphi(x))$

$= (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = \psi(x)$

* (αλλά έχει γίνει και στην Πραγμ. Αναλ.)