9/10/2018

H: χώρος Hilbert

$C \subseteq H$ • $C \neq \emptyset$ • κλειστό • κυρτό

⇙

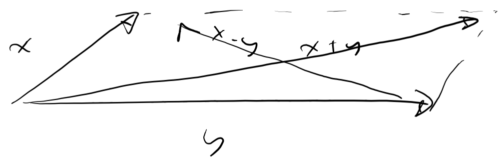
$\exists!\, v \in C$ με ελάχιστο μήκος.

Απόδ Θέτω $d = \inf\{\|x\| : x \in C\}$

$\exists$ ακολ $(x_n) : x_n \in C : \|x_n\| \to d$

Θα δω ότι η (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $v \in C$ και αυτό είναι το ζητούμενο. (κλειστό)

Κανόνας #



$$\|x_n - x_m\|^2 + \|x_n + x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2$$

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\Big\|\underbrace{\frac{x_n + x_m}{2}}_{\in C}\Big\|^2$$

$$\leq \underset{\substack{\downarrow \\ 2d^2}}{2\|x_n\|^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 2d^2}}{2\|x_m\|^2} - 4d^2$$

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : \|x_n - x_m\|^2 < \epsilon^2$

ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ ! $\exists \lim_n x_n = v$ of course.

$\|v\| = \lim \|x_n\| = d$, οπότε

$\|v\| = \inf\{\|x\| : x \in C\}$

Μοναδικότητα!

Αν $\exists$ κι άλλο $v' \in C$ με $\|v'\| = d$

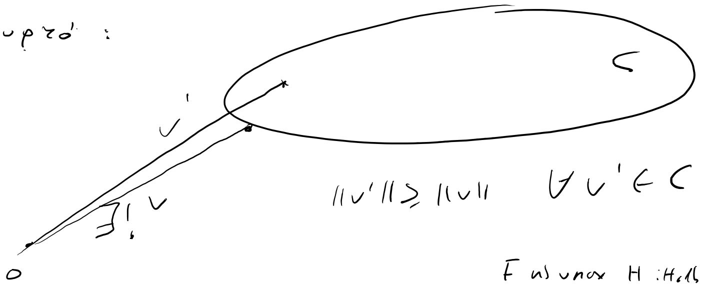
τότε από #

$$\|v - v'\|^2 = \|v\|^2 + \|v'\|^2 - 4\Big\|\frac{v+v'}{2}\Big\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0$$

$\Downarrow$

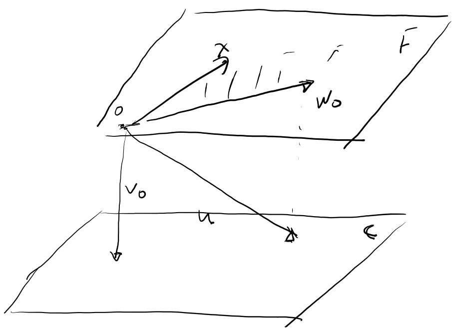
$v = v'$

Κυρτό:



$\|v'\| \geq \|v\| \quad \forall v' \in C$

F κλ. υπόχ. H: Hilbert νδο:
$\forall u \in H$ γράφεται ως
$$u = \underset{F}{\underset{\uparrow}{w_0}} + \underset{F^{\perp}}{\underset{\uparrow}{v_0}}$$



$C = u + F = \{u + w : w \in F\}$

$C \neq \emptyset \quad (u \in C)$

C: κυρτό (F κυρτό)

C: κλειστό (F κλειστό)

από προηγούμενο $\exists!\, v_0 \in C$ ελαχίστου μέτρου, δηλ.

$$\|v_0\| = \inf\{\|v\| : v \in C\}$$
$$= \inf\{\|u - w\| : w \in F\} = \operatorname{dist}(u, F)$$

Ισχ. $v_0 \perp F$ (οπότε θα έχω τελειώσει αφού

$w_0 = u - v_0 \in F$ άρα $u = \underset{F}{\underset{\uparrow}{w_0}} + \underset{F^{\perp}}{\underset{\uparrow}{v_0}}$)

1η απόδ (Β. Νεστορίδης) Έστω $x \in F$ νδο $x \perp v_0$

θέτω $F_0 = \operatorname{span}\{x, w_0\} \subseteq F$

$\|v_0\| = \operatorname{dist}(u, F) \leq \operatorname{dist}(u, F_0)$

δηλ $\|u - w_0\| \leq \|u - w\| \quad \forall w \in F_0$.

Από Λήμμα Βελτ., $u - w_0 \perp F_0$

δηλ $v_0 \perp F_0$ ΟΕΔ

2η Απόδ: Έστω $x \in F$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad v_0 + \lambda x \in C$

$\Rightarrow \|v_0 + \lambda x\| \geq \|v_0\|$

$\cancel{\|v_0\|^2} + 2\operatorname{Re}\langle \lambda x, v_0\rangle + \|\lambda x\|^2 \geq \cancel{\|v_0\|^2}$

$\Updownarrow$

$2\operatorname{Re}\lambda\langle x, v_0\rangle + |\lambda|^2\|x\|^2 \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Γράψε: $\langle x, v_0\rangle = e^{i\theta}|\langle x, v_0\rangle|$. Πάρε $t \in \mathbb{R}$ και

$\lambda = -t e^{-i\theta}$ οπότε $\langle \lambda x, v_0\rangle = -t e^{-i\theta}\langle x, v_0\rangle$

$= -t|\langle x, v_0\rangle|$

$-2t|\langle x, v_0\rangle| + t^2\|x\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

άρα πρέπει $|\langle x, v_0\rangle| = 0$

$A^\perp$ κλειστός υπόχωρος :

<u>Απόδ</u> Αν $x, y \in A^\perp$ και $\lambda \in \mathbb{K}$ τότε

$$\forall a \in A \quad \langle x+\lambda y, a\rangle = \langle x, a\rangle + \lambda \langle y, a\rangle = 0$$

άρα $x+\lambda y \in A^\perp$

Επίσης αν (x_n) από $x_n \in A^\perp$ και $x_n \to x$

τότε $x \in A^\perp$ διότι

$$\forall a \in A \quad \langle x, a\rangle = \langle \lim x_n, a\rangle \overset{!}{=} \lim_n \langle x_n, a\rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Δείξαμε ότι: $\forall$ M κλειστό υπόχωρο χώρου Hilbert,

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

$$\forall\, x \overset{!}{=} y + z \qquad y \in M, \ z \perp M$$

ορίσαμε τότε

$$P_M = P(M) : H \longrightarrow H : x \longrightarrow y$$

1ον γραμμική

Απόδ. $x_i = y_i + z_i$, $i = 1, 2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$x_1 + \lambda x_2 = \underbrace{(y_1 + \lambda y_2)}_{\in M} + \underbrace{(z_1 + \lambda z_2)}_{\in M^{\perp}}$$

$$P_M(x_1 + \lambda x_2) \overset{!}{=} (y_1 + \lambda y_2) = P_M(x_1) + \lambda P_M(x_2)$$

2ον P_M συνεχής: (x_n) στο H και $x_n \longrightarrow x$

νδο $P_M(x_n) \longrightarrow P_M(x)$

όμως, $P_M(x) + (x - P_M(x)) = x$

$\perp$

$$\|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M x\|^2 = \|x\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|P_M x\| \leq \|x\|$$

Άρα, έχουμε:

$$\|P_M(x_n) - P_M(x)\|^2 \overset{\gamma\rho}{=} \|P_M(x_n - x)\|^2 \leq \|x_n - x\|^2 \longrightarrow 0 \qquad \blacksquare$$

Παράδ. όπου $M^\perp = \{0\}$

$c_{00} \ni x = (x(n))$ με $\exists n_x : x(n) = 0 \ \forall n \geq n_x$

$$\langle x, y \rangle = \sum x(k)\overline{y(k)}$$

Θέτω : $M = \{x \in c_{00} : \sum x(n) \frac{1}{n} = 0\}$

$x \in M \iff \langle x, u \rangle = 0$ όπου $u = (\frac{1}{k})$

$u \in \ell^2$ αλλά $u \notin c_{00}$

$\Downarrow$

M γραμμ. χώρος

και M κλειστό (Cauchy - Schwarz στον ℓ^2)

$$|\langle x, u \rangle| \leq \|x\|_2 \|u\|_2 < \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

όπου αν (x_k) με $x_k \in M$

και $\|x_k - x\|_2 \to 0$

τότε $x \in M$ διότι

$$\left|\sum_n x(n)\frac{1}{n}\right|^2 = \left|\sum_n (x(n) - x_k(n))\frac{1}{n}\right|^2$$

$\leq \|x - x_k\|_2 \|u\|_2 \to 0$

M κλειστό υπόχ. του c_{00}

όμως $\nexists\, v \perp M$ εκτός απ' το 0

Ιδέα της απόδειξης : $x \in M \iff \langle x, u \rangle = 0$

δηλ. το μόνο $v \perp M$ είναι το u (και τα πολλαπλάσια) που είναι "έξω από το χώρο"

Απόδειξη Έστω $v \perp M$

προφ. $\forall n$, $e_n = (0 \ldots 0, 1, 0 \ldots 0)$

$$\langle v, e_n - \tfrac{1}{n} e_1 \rangle = v(n) - \tfrac{1}{n} v(1)$$

Αλλά $e_n - \frac{1}{n} e_1 \in M$ διότι αν $x = e_n - \frac{1}{n} e_1$

τότε:

$$\sum \tfrac{1}{k} x(k) = -\tfrac{1}{n} + 0 \cdots 0 + \tfrac{1}{n} 1 = 0$$

$x = (-\frac{1}{n}, 0 \ldots, 1, \ldots) \in M$

όπως πρέπει $v \perp x$ δηλ. $\langle v, e_n - \frac{1}{n} e_1 \rangle = 0$

δηλ. : $\boxed{\langle v, e_n \rangle = \frac{1}{n} \langle v, e_1 \rangle}$

$v(n) = \frac{1}{n} v(1) \quad \forall n$ δηλ.:

$v = v(1)(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots)$

οπότε, αν $v(1) \neq 0$ τότε $v \notin c_{00}$, άρα πρέπει

$v(1) = 0$, οπότε $v = 0$. $\blacksquare$

H: χώρος Hilbert, $f: H \to \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχής

να βρω (μοναδικό) $y \in H$ ώστε

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in H$$

<u>Απόδ.</u> Αν $f = 0$ τότε θέτω $y = 0$

Αν $f \neq 0$ τότε $\ker f = M \neq H$

γραμμ. χώρος (f γραμμ.)

κλειστός (f συνεχής)

<u>Άρα</u> $\exists\, z \perp M$, $z \neq 0$

$\forall x \in H$

το στοιχείο: $f(z)x - f(x)z$

ικανοποιεί $f(\qquad) = f(z)f(x) - f(x)f(z) = 0$

άρα $\forall x \in H$ το $f(z)x - f(x)z \in M$

άρα $\perp z$

άρα $\langle f(z)x - f(x)z, z \rangle = 0$

άρα $f(z)\langle x, z\rangle - f(x)\langle z, z\rangle = 0$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \frac{f(z)}{\|z\|^2}\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle$$

όπου $y = \dfrac{\overline{f(z)}\, z}{\|z\|^2}$ $\blacksquare$