4 Οκτ 18

(α) $$\int_0^{2\pi} g(x-y)\, f(y)\, dy = \int_0^{2\pi} g(t)\, f(x-t)\, dt \quad \forall x$$

ΝΑΙ

(αλλαγή μεταβλητής + 2π περιοδικότητα)

(β) ℓ^2 είναι γραμμ. χώρος;

$$(|x|-|y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|xy| \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad 2|xy| \leq |x|^2 + |y|^2$$

$$\Downarrow$$

$$|x+y|^2 \leq 2|x|^2 + 2|y|^2$$

$$\Downarrow$$

$\forall n$ $$\sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^2 \leq 2\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^2 + 2\sum^{n} |y(k)|^2$$

$$\leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: ok!

(γ) $[a_{ij}]$ πίνακας $a_{ij} \in \mathbb{C}$

$$\langle x,y\rangle_a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x(j)\, \overline{y(i)}$$

πότε είναι εσωτ. γινόμ.;

[Απάντηση: αν ο $[a_{ij}]$ είναι (ερμιτιανός και) θετικά ορισμένος — θα το δούμε αργότερα]

Υπόθ. πρώτα όταν:

$$a_{ij} = a(i)\,\delta_{ij} \quad : \begin{bmatrix} a(1) & 0 & \cdots \\ 0 & a(2) & 0 \cdots \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\langle x,y\rangle_a = \sum_{i=1}^{n} a(i)\, x(i)\, \overline{y(i)}$$

πρέπει; $\langle x,x\rangle_a \geq 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow a(i) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad \sum a(i)\, |x(i)|^2 \quad \forall x$$

$\langle x,x\rangle \neq 0$ όταν $x \neq 0 \quad \Rightarrow a(i) > 0$

(βάλε $x = e_i$)

Παράδ εσωτ γινομένου:

Έστω $E := C^1([a,b]) \subseteq C([a,b])$

έχω ορίσει $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Δοκιμάζω:
$f,g \in E$

$$\langle f,g\rangle_1 = \int_a^b f'(t)\overline{g'(t)}\,dt \quad \text{εγ ?}$$

$$\langle f,f\rangle_1 = \int_a^b |f'(t)|^2\,dt \quad \text{εγ ?}$$

$f(t) = 11 \ \forall t$: $f \in E$ $f \neq 0$

αλλά $\langle f,f\rangle_1 = 0$

δεν είναι εγ

Δοκιμάζω:

$$\langle f,g\rangle_{?} = \int f'(t)\overline{g'(t)}\,dt + \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

οκ ?

Δείξαμε ότι $\forall x,y$:

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$$

— ανν $\{x,y\}$ γρ εξ

Απόδ. Αρκεί για $y\neq 0$ (γιατί;)

Αν $x=\lambda y$ τότε:

$$|\langle x,y\rangle|^2 = |\langle \lambda y,y\rangle|^2 = |\lambda|^2\langle y,y\rangle\langle y,y\rangle =$$

$$= \langle \lambda y,\lambda y\rangle\langle y,y\rangle \quad : \text{ισότητα}$$

Αντίστροφα, έστω ότι έχω ισότητα. Διαιρώντας με $\langle y,y\rangle$, ($\neq 0$) μπορώ να υποθέσω ότι $\langle y,y\rangle = 1$. Έχω:

$$0 \le \langle x-\langle x,y\rangle y,\ x-\langle x,y\rangle y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle} - \langle x,y\rangle\langle y,x\rangle + |\langle x,y\rangle|^2\langle y,y\rangle$$

(Αλλά $\langle y,y\rangle = 1$)

$$= \langle x,x\rangle - |\langle x,y\rangle|^2 - |\langle x,y\rangle|^2 + |\langle x,y\rangle|^2$$

$$= \langle x,x\rangle - |\langle x,y\rangle|^2 = 0$$

Επομένως έλαβα ότι

$$\langle x-\langle x,y\rangle y,\ x-\langle x,y\rangle y\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad x-\langle x,y\rangle y = 0 \rightsquigarrow \text{άρα } x=\lambda y \ \blacksquare$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

$$0 \le \|x+y\| \overset{?}{\le} \|x\|+\|y\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\|x+y\|^2 \overset{?}{\le} (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle$$

$$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle \quad ; + \langle y,x\rangle \cdots + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$\le \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$$

$$\underset{(C-S)}{\le} \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$$

Έστω $\Phi = \{e_i : i \in I\}$ ΟΚ οικογένεια
νδο Φ είναι γρ ανεξ

Έστω $\overbrace{\lambda_1 e_{i_1} + \lambda_2 e_{i_2} + \dots + \lambda_n e_{i_n}}^{h} = 0$

όπου $\lambda_\kappa \in \mathbb{K}$ νδο $\lambda_\kappa = 0 \ \forall \kappa$

$$0 = \langle h, e_{i_1} \rangle = \sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa \underbrace{\langle e_{i_\kappa}, e_{i_1} \rangle}_{= 0 \text{ για } \kappa \neq 1} = \lambda_1$$

$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ γρ. ανεξ.

Θέλω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ο.κ. με ίδιες γραμμικές θήκες

<u>Απόδ</u> (Επαγωγή)

- $x_1 \neq 0$ θέτω $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ $\quad [x_1] = [e_1]$

- Επαγ. βήμα: Έστω ότι έχω επιλέξει $e_1 \dots e_N$ ο.κ. με

$$\operatorname{span}\{x_1 \dots x_N\} = \operatorname{span}\{e_1 \dots e_N\}$$

Κοιτάω το $x_{N+1} \overset{\text{υπόθ.}}{\notin} \operatorname{span}\{x_1 \dots x_N\} =$

οπότε το

$$y = x_{N+1} - \sum_{j=1}^{N} \langle x_{N+1}, e_j \rangle e_j \neq 0 \qquad (*)$$

δηλ. "αφαιρώ από το x_{N+1} την "προβολή" του στον χώρο που έχω ήδη εξετάσει"

Αφού $y \neq 0$, μπορώ να ορίσω:

$$e_{N+1} = \frac{y}{\|y\|}$$

Έχω $\langle y, e_i \rangle = \langle x_{N+1}, e_i \rangle - \langle x_{N+1}, e_i \rangle = 0 \quad \forall i = 1 \dots N$

άρα και $e_{N+1} \perp e_1 \dots e_N$ δηλ. $\{e_1 \dots e_{N+1}\}$ ο.κ.

Τώρα, $x_{N+1} \in \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_N, y\} = \operatorname{span}\{e_1 \dots e_{N+1}\}$

άρα $\operatorname{span}\{x_1 \dots x_N, x_{N+1}\} \subseteq \operatorname{span}\{e_1 \dots e_N, e_{N+1}\}$

Τέλος, από την $(*)$, $y \in \operatorname{span}\{e_1 \dots e_N, x_{N+1}\} =$

$= \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_N, x_{N+1}\}$

άρα $e_{N+1} \in \operatorname{span}\{x_1 \dots x_{N+1}\}$

(αφού $e_{N+1} = y/\|y\|$).

οπότε

$$\operatorname{span}\{e_1 \dots e_{N+1}\} \subseteq \operatorname{span}\{x_1 \dots x_{N+1}\} \qquad \blacksquare$$

Έστω χώρος $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με $\dim F = \underline{n}$

- <u>Ισχ</u> $\exists$ μια αλγεβρική βάση $\{e_1 .. e_n\}$ που είναι και ΟΝ

  <u>Αποδ</u> Gram-Schmidt

- $\forall x \in F$ υπάρχει $!$ (= μοναδική)

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

<u>Αποδ</u> Αν $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

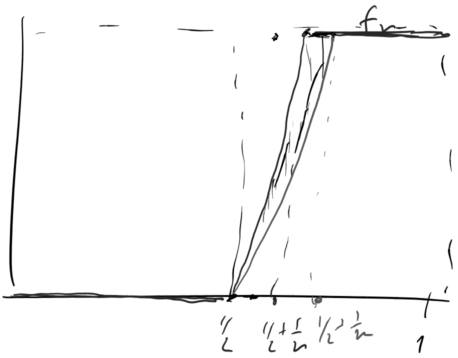
και εσωτερικοποιήσω με το e_j :

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_k \lambda_k \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_j$$

$\blacksquare$

$(C([0,1]), \|\ \|_2)$: $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt$

όχι πλήρης αλλά ‖ ‖ από εδώ για



$|f_n - f_m| \le 1$

$\int |f_n - f_m|^2 \le$

$\int |f_n - f_m|$

$=$ εμβαδόν Δ

$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

(f_n) είναι $\|\ \|_2$ - βασική

αλλά δεν μπορεί να συγκλίνει σε ΣΥΝΕΧΗ συνάρτηση f

θα έπρεπε $f(t) = 0 \quad \forall\, t \le \frac{1}{2}$

και $f(t) = 1 \quad \forall\, t > \frac{1}{2}$

ασυνεχής!

(δες στο βιβλίο του Κατσάρδου, σελ 14-15)