30/10/2018

(Παράδ.)

Γράψε: $\sum_{i,k} |a_{ik}|^2 = \|A\|_{22}^2$

ορίζω T ως εξής:

$$(Tx)(i) = \sum_k a_{ik}\, x(k)$$

πρέπει: συγκλίνει $\forall i$

• επειδή $\left(\sum_k |a_{ik}\, x(k)|\right)^2 \underset{(1)}{\overset{CS}{\le}} \sum_k |a_{ik}|^2 \sum_k |x(k)|^2 \le \|A\|_{22}^2 \, \|x\|_2^2$

οκ

• θέλω νδο όλη η y: $y(i) = (Tx)(i)$ ανήκει στον ℓ^2. Από την (1):

$$\sum_i |y(i)|^2 \le \sum_i \left(\sum_k |a_{ik}|^2 \, \|x\|_2^2 \right) = \|A\|_{22}^2 \, \|x\|_2^2$$

$< +\infty$

άρα $(y(i)) \in \ell^2$ T γραμμ.! προφ. ..

$$\|Tx\|_2^2 = \|y\|_2^2 \le \|A\|_{22}^2 \, \|x\|_2^2$$

άρα T φραγμ. και $\|T\| \le \|A\|_{22}$

$M_f : L^2 \to L^2 \qquad (f \in C([a,b]))$

$M_f(g) = fg$ για $g \in C([a,b])$

δηλαδή καλά ορισμ., φραγμ. και γραμμικά

$$\|M_f(g)\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2 \quad \forall g \in C([a,b])$$

$$\Downarrow$$

ισχύει $\forall g \in L^2([a,b])$

$$\Downarrow$$

$$\|M_f\| \le \|f\|_\infty$$

Ισχύει: $\|M_f\| = \|f\|_\infty$ (ασκ.)

Στον $L^2(\mathbb{R})$: η πλήρωση του $C_c(\mathbb{R})$

$C_c(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχείς που μηδενίζονται έξω από κάποιο $[-N,N]\}$

με νόρμα την

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 = \int_{-N}^{N} |f|^2$$

Έστω $f \in C(\mathbb{R})$ ι. συνεχής

τότε $\forall g \in C_c(\mathbb{R})$, λόγω $fg \in C_c(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$

Η απεικόνιση:

$$M_f^0 : C_c(\mathbb{R}) \longrightarrow C_c(\mathbb{R})$$
$$g \longmapsto fg$$

καλά ορισμένη γραμμική

$$\|M_f^0(g)\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |fg|^2 \overset{?}{\leq} M \int_{-\infty}^{\infty} |g|^2$$

όμως, $\exists N$ ώστε g μηδενίζεται έξω από το $[-N,N]$

οπότε η $f\big|_{[-N,N]}$ είναι φραγμένη από κάποιο $\|f\|_N$

οπότε $\|M_f^0(g)\|_2^2 \leq \|f\|_N^2 \, \|g\|_2^2$ $\quad \forall g \in C_c(\mathbb{R})$

$\Downarrow$ (γνωστό εξαρτης)

η M_f^0 είναι φραγμένη τελεστής

άρα επεκτείνεται $L^2 \to L^2$

Ποιό είναι το λάθος;

Αν επιπλέον υποθέσω f φραγμ. στο $\mathbb{R}$

τότε $\sup\{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} = \|f\|_\infty$

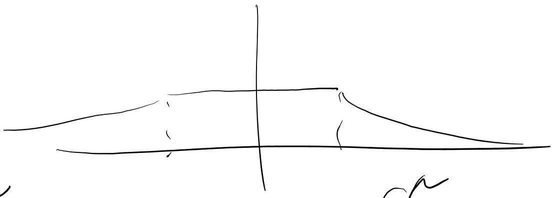
Έτσι έχω
$$\|M_f^o(g)\|_2 \le \|f\|_\infty \|g\|_2$$
$$\forall\, g \in C_c(\mathbb{R})$$
οπότε επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή
$$M_f : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$
με
$$\|M_f\| \le \|f\|_\infty$$
$$(\text{και} \quad = \quad)$$

<u>Παρ.</u> $f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$

τότε $(M_f^o g)(x) = x g(x) \quad g \in C_c(\mathbb{R})$

όμως
$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < +\infty \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x g(x)|^2 dx < +\infty$$

<u>π.χ.</u>
$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ \frac{1}{|x|}, & |x| > 1 \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} |g(x)|^2 dx < +\infty$$

ενώ
$$x g(x) = \begin{cases} x, & |x| \le 1 \\ 1, & |x| > 1 \end{cases} \Rightarrow \int |x g(x)|^2 dx = +\infty$$

Shift στο $\ell^2(\mathbb{Z})$: bilateral shift

$$(Ux)(n) = x(n-1)$$

προφανώς γραμμικός, $\|Ux\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n-1)|^2 \overset{m=n-1}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |x(m)|^2 = \|x\|_2^2$

άρα είναι ισομετρία, αλλά και επί

Άλλος τρόπος: Ξεκινάω από $x \in c_{00}(\mathbb{Z})$

$$x = (x(n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e_n \quad (\text{πεπ. πολλά } \neq 0 \text{ όροι})$$

θέλω $Ue_n = e_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

όπως $\forall x \in c_{00}(\mathbb{Z})$

επεκτείνω γραμμικά:

$$Ux = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e_{n+1} \underset{n+1=m}{=} \sum_{m\in\mathbb{Z}} x(m-1) e_m$$

$$(Ux)(m) = x(m-1)$$

Άρα

$\|Ux\|_2 = \|x\|_2$ στον $c_{00}(\mathbb{Z})$

άρα επεκτείνεται στο $\ell^2(\mathbb{Z})$

S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$: $Se_n = e_{n+1}$

ορίζε αν

$$x = \sum_{n=0}^{N} x(n) e_n \in c_{00}(\mathbb{Z}_+)$$

$$Sx = \sum_{n=0}^{N} x(n) e_{n+1} \quad \text{θέτω } n+1=m$$

$$= \sum_{m=1}^{N+1} x(m-1) e_m$$

οπότε $\|Sx\|_2^2 = \sum_{m=1}^{N+1} |x(m-1)|^2 = \sum_{n=0}^{N} |x(n)|^2 = \|x\|_2^2$

<u>αλλιώς</u> : $x = (x(0), x(1), \dots, x(N), 0, \dots)$

$Sx = (0, x(0), x(1), \dots, x(N-1), x(N), 0, \dots)$

$x = (x(0), x(1), \dots, x(N), 0, 0, \dots)$

$Sx = (0, x(0), x(1), \dots, x(N-1), x(N), 0, \dots)$

$\Downarrow$

$\|Sx\|_2 = \|x\|$

<u>ορίζω</u>

$$S^* e_n = \begin{cases} e_{n-1}, & n>0 \\ 0, & n=0 \end{cases}$$

$S^* x = (x(1), x(2), \dots, x(N), 0, 0, \dots)$

$$\|S^*x\|_2^2 = \sum_{m=1}^{N} |x(m)|^2 \leq \sum_{m=0}^{N} |x(m)|^2 = \|x\|_2^2$$

$\|S^*x\|_2 \leq \|x\|_2$ (όχι πάντα ισότητα)

$\Downarrow$

$\|S^*\| \leq 1$ φράγμα $= 1$

διότι $\|S^* e_{12}\| = \|e_{12}\| = 1$

$S^*S : e_n \xrightarrow{S} e_{n+1} \xrightarrow{S^*} e_n$ άρα $S^*S(e_n) = e_n \ \forall n$

$\Downarrow$

$S^*S(x) = x$

$\forall x \in \text{span}\{e_n : n \geq 0\}$

$\Downarrow$

$S^*S = I$ παντού

$SS^* : e_n \xrightarrow{S^*} e_{n-1} \xrightarrow{S} e_n \ \forall n \geq 1$

$(n>0)$

$SS^*(e_0) = S(0) = 0$

$\Downarrow$

$SS^*(x) = x, \ x \in \text{span}\{e_n : n \geq 1\}$

$SS^*(x) = 0, \ x \in \text{span}\{e_0\}$

$\Longrightarrow SS^* = P(\overline{\text{span}\{e_n : n \geq 1\}})$

$= P([e_0]^\perp)$

$D : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1])$

$\exists f'$ στο $[0,1]$ και είναι συνεχής στο $[0,1]$

$Df = f'$ γραμμική απεικόνιση

<u>Δεν</u> είναι συνεχής ως προς $\| \ \|_2$, $\| \ \|_2$

<u>Πχ</u> $f_n(t) = t^n$ $\quad f_n \in C^1([0,1])$

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |t^n|^2 dt = \frac{1}{2n+1} \longrightarrow 0$$

$$\|Df_n\|_2^2 = \int_0^1 |n t^{n-1}|^2 dt = $$

$$= n^2 \frac{1}{2n-1} \not\longrightarrow 0$$

<u>Δεν</u> είναι συνεχής, άρα δεν επεκτείνεται συνεχώς στο $L^2([0,1])$

[$C^1([0,1])$ <u>είναι</u> πυκνός στο $L^2([0,1])$ διότι περιέχει τα πολυώνυμα]

Μπορώ (όμως) να ορίσω $\|f\|_H$ στο $C^1([0,1])$

ως εξής: $\|f\|_H^2 = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2$

τότε είναι σωστό:

$$D_H : (C^1([0,1]), \|\ \|_H) \longrightarrow (C([0,1]), \|\ \|_2)$$

$D_H f = f'$ Είναι συνεχής

$$\|D_H f\|_2^2 = \|f'\|_2^2 \leq \|f\|_H^2$$

άρα ο D_H επεκτείνεται σε φραγμ. τελεστή με $\|D_H\| \leq 1$ στην πλήρωση $W^{1,2}([0,1])$ (: χώρος Sobolev) του $(C^1[0,1], \|\ \|_H)$.

$(E, \| \ \|)$ χώρος με νόρμα

$(F, \| \ \|)$ χώρος Banach   <u>όχι</u> Hilbert!!

<u>ΝΔΟ</u> $(\mathcal{B}(E,F), \| \ \|)$

$\Downarrow$

χώρος Banach

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \le 1\}$$

<u>Απόδ.</u> Έστω (T_n) στο $\mathcal{B}(E,F)$ και είναι βασική ως προς $\| \ \|$ τελεστή

<u>ΝΔΟ</u> $\exists\, T \in \mathcal{B}(E,F)$ (<u>δηλ.</u> και φραγμ.) ώστε $T_n \longrightarrow T$ ως προς τη $\| \ \|$ τελεστή.

Σταθ. $x \in E$ και θεωρώ την ακολουθία $(T_n x)$ στοιχεία του F

$$\|T_n x - T_m x\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\|_F \quad (\text{γραμμική του } T_n - T_m)$$

$$\le \|T_n - T_m\| \, \|x\|_E \quad (\text{ορισμός } \| \ \|)$$

$(\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n, m \ge n_0\ \|T_n - T_m\| < \varepsilon)$

$(T_n x)$ βασική στον F

Από <u>υποθ.</u> $\exists\, y_x \in F : \|y_x - T_n x\|_F \longrightarrow 0$

Ορίζω την απεικόνιση : $E \longrightarrow F : x \longmapsto y_x$

όπου $y_x = \lim T_n(x)$

<u>πρέπει</u> να γραμμική

$$y_{(x+\lambda x')} = \lim T_n(x + \lambda x')$$

$$= \lim(T_n(x) + \lambda T_n(x'))$$

συγκλίνουν και οι δύο

$$= y_x + \lambda y_{x'}$$

και την ονομάζω $T(x) = y_x$

DEN ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ!!   <u>πρέπει</u> ότι η T είναι φρ. Δηλ. $\forall x \in E$,

$$\|Tx\|_F = \|\lim_n T_n x\|_F = \lim_n \|T_n x\|_F$$

$$\le (\lim_n \|T_n\|)\, \|x\|_F \quad \text{λόγω [illegible]}$$

$\Downarrow$

συγκλίνει;

νέα απόπειρα νδο T φραγμ:

(T_n) βασική στο χ.γ. $(\mathcal{B}(E,F), \|\ \|)$

άρα φραγμ!

δηλ $\exists M: \|T_n\| \le M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

οπότε $\forall x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n x\| \le M\|x\| \Rightarrow \lim_n \|T_n x\| \le M\|x\|$$

δηλαδή $\|Tx\|_F \le M\|x\|_E \quad \forall x \in E$

μέχρι εδώ

άρα T είναι φραγμ, $T \in \mathcal{B}(E,F)$

νδο $\|T - T_n\| \to 0$

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0: \quad \forall n, m \ge n_0: \quad \|T_n - T_m\| < \epsilon$

οπότε $\forall x \in E$

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| < \epsilon\|x\|_E$$

$\forall n, m \ge n_0$ σταθ $m \ge n_0$

παίρνω $n \to \infty$

$$\|(\lim_n T_n x) - T_m x\| \le \epsilon\|x\|_E$$

$\forall x \in E, \ \forall m \ge n_0 \quad \|Tx - T_m x\| \le \epsilon\|X\|_E$

ανεξ του x

η ανισότητα: $\|(T - T_m)x\| \le \epsilon\|x\|_E \quad \forall x \in E$

δείχνει ότι $T - T_m$ φραγμ, άρα T φραγμ, και

$\|T - T_m\| \le \epsilon \quad \forall m \ge n_0$

άρα $T_m \to T$ ως προς $\|$ τελεστή $\|$