27 Νοεμβρ 2018

Αν $T: H \to \mathcal{K}$ (Hilbert) είναι συμπαγής
τότε $\exists (F_n): F_n \in \mathcal{F}(H,K)$ τ.ω. $\|T - F_n\| \to 0$
νόρμα
του $\mathcal{B}(H,K)$

Απόδ (i) **Λήμμα** Αν $T \in \mathcal{K}(H,K)$ τότε
$\overline{imT} \subseteq K$ διαχωρίσιμος

Απόδ συμπαγής: αφού $\mathbb{B}_H \subseteq H$ φραγμ., $\overline{T(\mathbb{B}_H)}$ συμπαγές
άρα διαχωρίσιμο

$\Rightarrow \forall n$ $A_n = \{T(x) : x \in H, \|x\| \le n\}$ είναι διαχωρίσιμο
διότι $\overline{A_n}$ συμπαγής, άρα διαχ.

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{T(x) : x \in H, \exists n : \|x\| \le n\}$
$= imT$
= αριθμ ένωση διαχ χώρων
άρα διαχωρίσιμος

(γνωστό σε μετρικούς χώρους!!)

$\Rightarrow$ $\overline{imT}$ είναι διαχωρίσιμος
(διότι $\forall$ αριθμ πυκνό $\subseteq imT$
είναι και πυκνό στο $\overline{imT}$)

Τώρα έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική βάση
του $\overline{imT} \subseteq K$
ορίζω $P_n = P(\text{span}\{e_1 .. e_n\})$: είναι πεπερ. τάξης

$\forall y \in \overline{imT}$ έχω $y = \sum_{i=1}^{\infty} \langle y, e_i \rangle e_i$

$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle e_i = \lim_n P_n(y)$

δηλ $\|P_n(y) - y\|_K \to 0$

$\Downarrow$

$\forall x \in H$, αφού το $Tx \in imT$ ισχύει

$\to$ $\|P_n T x - Tx\| \to 0$

πεπερ. τάξης : άρα $T =$ κατά σημείο $\lim P_n T$ πεπερασμένης τάξης
(χωρίς συμπάγεια του T)

$\longrightarrow$

Τώρα: Επειδή T συμπαγής

$\exists$ σχ. η συνθήκη $\|P_n T x - Tx\| \to 0$

είναι ομοιόμορφη στη $\hat{B}_H$

Απόδ. (δηλ. $\|P_n T - T\| \longrightarrow 0$!)

$T(\hat{B}_H)$ είναι ολικά φραγμ. $\subseteq K$

άρα $\forall \epsilon > 0$ $\exists x_1 \dots x_m \in H$ τ.ώ.

$$T(\hat{B}_H) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B(Tx_k, \epsilon)$$

δηλ. $\forall x \in \hat{B}_H$: $\exists k = 1 \dots m$:

$\|Tx - Tx_k\| < \epsilon$ (1)

όμως, $\forall k = 1 \dots m$ $\|P_n T x_k - T x_k\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$

(2)

$\|P_n T x_k - Tx_k\| < \epsilon$ $\forall k = 1 \dots m$
(πεπ. πλήθος)

οπότε $\forall x \in \hat{B}_H$

διαλέγω πρώτα $k \in 1, 2, \dots m$ ώστε (1)

και μετά για το k που βρήκα χρησιμοποιώ (2)

και έχω, $\forall n \geq n_0$

$$\|P_n T x - Tx\| \leq \|P_n Tx - P_n T x_k\| + \|P_n T x_k - T x_k\| + \|T x_k - Tx\|$$

$$\leq \|P_n\| \, \|Tx - Tx_k\| + \epsilon + \|Tx_k - Tx\|$$

$$\leq \epsilon + \epsilon + \epsilon$$

ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ :

Η ιδιότητα AP σε χώρους Banach

Ορ Ένας χώρος Banach E έχει την approximation property : $\forall$ χώρο Banach F

$$\mathcal{K}(E,F) = \overline{\mathcal{F}(E,F)}$$

Θεώρημα (Grothendieck, 1955) GROTHENDIECK

ο E έχει την AP

$$\Updownarrow$$

$\forall K \subseteq E$ συμπαγές και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T = T_{K,\varepsilon} \in \mathcal{F}(E)$

ώστε $\|Tx - x\| < \varepsilon$ $\forall x \in K$

Δηλ ο Id προσεγγίζεται από φραγμ. τελεστές πεπερ. τάξης ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του E

(**παρ** : οι E = Hilbert, c_0, ℓ_p, $1 \le p < \infty$, L_p είναι)

$E = \mathcal{B}(\ell^2)$ **δεν** έχει την AP

(1981 SZANKOWSKI)

Ορ ο E έχει τη BAP (bounded AP)

αν επιπλέον $\exists$ σταθερά $M < \infty$

ώστε να μπορώ να επιλέξω

$\|T_{K,\varepsilon}\| \le M$

ο E έχει τη MAP (metric AP)

αν $M = 1$

ΚΛΕΙΝΕΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ]

H, K Hilbert:

Πρτ. Αν $T: H \to K$ συμπαγής τότε ο $T^*: K \to H$ συμπαγής

Απόδ. Για την περίπτωση $H = K$: Έστω (x_n) μια τυχαία ασθ. ακολουθία στο H

από το θεώρημα:

$$T \text{ συμπαγής} \Rightarrow \langle Tx_n, x_n \rangle \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle T^*x_n, x_n \rangle = \overline{\langle Tx_n, x_n \rangle} \to 0$$

$\Downarrow$ ίδιο θεώρημα

T^* συμπαγής

Γενικότερα:

Πρτ. $T \in \mathcal{K}(H,K) \overset{(\alpha)}{\Longleftrightarrow} T^*T \in \mathcal{K}(H) \overset{(\beta)}{\Longleftrightarrow} T^* \in \mathcal{K}(K,H) \ (\gamma)$

συμπαγής

Απόδ. $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$: T συμπαγής, T^* φραγμ. $\Rightarrow T^*T$ συμπ.

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Έστω (x_n) φραγμ. ακολουθία στο H

ΝδΟ (Tx_n) έχει συγκλ. υπακ.

Ξέρω ότι η (T^*Tx_n) έχει συγκλ. υπακ.

πες τη (T^*Ty_n)

Έχω: $\|Ty_n - Ty_m\|^2 = \langle T(y_n - y_m), T(y_n - y_m) \rangle$

$= \langle T^*T(y_n - y_m), (y_n - y_m) \rangle$

$\overset{CS}{\leq} \|T^*Ty_n - T^*Ty_m\| \, \|y_n - y_m\|$

$\leq \|T^*Ty_n - T^*Ty_m\| \, 2M$

Αλλά (T^*Ty_n) βασική, όπου $M = \sup_n \|x_n\|$

άρα η (Ty_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει.

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ Αν T^* συμπαγής τότε $T^*T = (\text{συμπ}) \circ (\text{φρ})$ άρα συμπαγής

$\Downarrow$ (μόλις δείξαμε)

T συμπαγής

Αν T συμπαγής, τότε θέτω $S = T^*$ και η υπόθεση λέει ότι ο S^* συμπαγής ($S^* = T$)

$\Downarrow$ (μόλις δείξαμε)

S συμπαγής άρα ο T^* συμπαγής ∎

Οι ∫κοί τελεστές είναι συμπαγείς:

Έστω $k : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής,
$H = L^2([0,1])$ και

$$(T_k f)(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y)\,dy \quad , f \in C[0,1]$$

(γενίκευση του $\sum k(i,j) f(j)$)

Έχουμε δείξει ότι T_k είναι φραγμένος, άρα επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $H \to H$

Μάλιστα $\|T_k f\|_2^2 \le \left(\int_0^1\int_0^1 |k(x,y)|^2 dx\,dy\right) \|f\|_2^2$

$$\|T_k\| \le \left(\iint |k(x,y)|^2 dx\,dy\right)^{1/2} =: \|k\|_{L^2([0,1]^2)}$$

νδο T_k είναι συμπαγής: προσεγγίζεται από τελεστές πεπερασμένης τάξης

Ιδέα (στην νόρμα του $B(H)$): θα δείξω ότι η $k(x,y)$ προσεγγίζεται από ένα $\sum_{n=1}^{N} k_n(x,y)$

όπου $k_n(x,y) = \varphi_n(x)\overline{\psi_n(y)}$

αλλά τότε $(T_{k_n} f)(x) = \int \varphi_n(x)\overline{\psi_n(y)} f(y)\,dy$

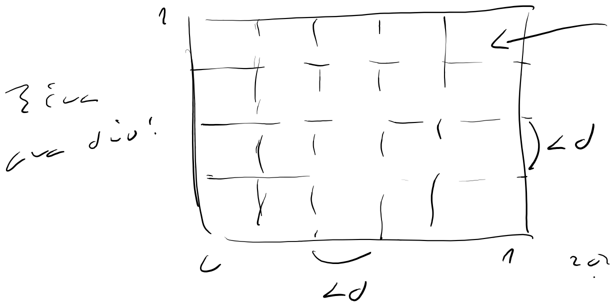
$= \varphi_n(x) \langle f, \psi_n \rangle_{L^2}$

δηλ. $T_{k_n} = \varphi_n \psi_n^*$ πρώτης τάξης

Η k είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]^2$

άρα $\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0$ ώστε

$$\max\{|s-t|, |y-x|\}<\delta \Rightarrow |k(s,t)-k(x,y)|<\epsilon$$



$i,j=1\dots n$

$\forall (s,t)\in[0,1]^2$

$\exists!\ R_{ij}$ ώστε

$(s,t)\in R_{ij}$

τότε, $\forall (x,y)\in R_{ij}$ έχω $\max\{|x-s|,|y-t|\}<\delta$

οπότε:

$$|k(s,t)-k(x,y)|<\epsilon \quad (*)$$

$\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$

παίρνω $a_{ij}=k\left(\frac{i-1}{n},\frac{j-1}{n}\right)$ πχ

από $(*)$: $\forall (s,t)\in[0,1]^2\ \exists (i,j)$:

$$|k(s,t)-a_{ij}|<\epsilon$$

Τώρα θέτω:

$$k_\epsilon=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\chi_{R_{ij}}$$ οπότε έχω:

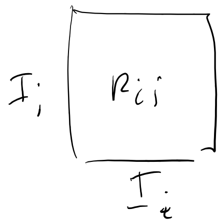
$|k(s,t)-k_\epsilon(s,t)|<\epsilon \quad \forall (s,t)\in[0,1]^2$

διότι για το (s,t) βρίσκω (i,j) ώστε $(s,t)\in R_{ij}$

όπως $|k(s,t)-a_{ij}|<\epsilon$

άρα $|k(s,t)-k_\epsilon(s,t)|<\epsilon$ διότι $k_\epsilon(s,t)=a_{ij}$

Όμως, $\chi_{R_{ij}}(s,t)=\chi_{I_i}(s)\chi_{I_j}(t)$



επομένως $T_{k_\epsilon}=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\chi_{I_i}\chi_{I_j}^{*}$

$\in \mathcal{F}(H)$

ΤΟ ΕΧΟΥΜΕ ΚΑΝΕΙ ΠΑΛΙΟΤΕΡΑ:

[Όπως: $\forall f\in C[0,1]$:

$$|T_k f(s)-T_{k_\epsilon}f(s)|^2$$

$$=\left|\int_0^1 k(s,t)f(t)\,dt-\int_0^1 k_\epsilon(s,t)f(t)\,dt\right|^2$$

$$=\left|\int_0^1 (k(s,t)-k_\epsilon(s,t))f(t)\,dt\right|^2$$

$$\overset{CS}{\le} \int_0^1 |k(s,t)-k_\epsilon(s,t)|^2dt\ \underbrace{\int_0^1|f(t)|^2dt}_{\|f\|_2^2}$$

$$|T_k f(s) - T_{k_\epsilon} f(s)|^2 \le \int_0^1 |k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|^2 dt \, \|f\|_2^2$$

$\forall s \in [0,1]$

$$\int_0^1 |T_k f(s) - T_{k_\epsilon} f(s)|^2 ds \le \|f\|_2^2 \underbrace{\int_0^1\int_0^1 |k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|^2 ds\,dt}_{\|k - k_\epsilon\|_{22}^2}$$

Δείξαμε ότι $\|T_k f - T_{k_\epsilon} f\|_2^2 \le \|k - k_\epsilon\|_{22}^2 \|f\|_2^2$
$\forall f \in C([0,1])$

$\Downarrow$ άρα και $\forall f \in H$

Το ξέρουμε!! $\longrightarrow$ $\|T_k - T_{k_\epsilon}\| \le \|k - k_\epsilon\|_{22}$

Όμως:

$$\|k - k_\epsilon\|_{22}^2 = \int_0^1\int_0^1 |k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|^2 dt\,ds$$

$$\le \sup_{s,t} |k(s,t) - k_\epsilon(s,t)|^2 < \epsilon^2$$

Αντίστοιχα στο $\ell^2(\mathbb{N})$, αν ένας A έχει πίνακα $[a_{ij}]$ και ισχύει $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < +\infty$

τότε ο A είναι συμπαγής τελεστής, διότι αν ορίσουμε A_n τον τελεστή με πίνακα $[b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i,j \le n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

τότε $\|A - A_n\| \le \overset{(\text{γιατί;})}{\downarrow} \sum_{i,j \ge n} |a_{ij}|^2$ το οποίο $\longrightarrow 0$ καθώς $n \to \infty$

αλλά κάθε A_n είναι πεπερασμένης τάξης

άρα ο A είναι συμπαγής

Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή

αν $A = [a_{ij}]$ είναι συμπαγής τότε $\not\Rightarrow \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < +\infty$

παρ/δα $A = diag(a_n)$ όπου $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_n |a_n|^2 = \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$$

αλλά είναι συμπαγής διότι $(a_n) \to 0$

και έχουμε δείξει ότι αν $(a_n) \in c_0$

τότε $D_a \in \mathcal{K}$ $\boxed{}$

Οι A με $\sum |a_{ij}|^2 < +\infty$ HILBERT-SCHMIDT

τελεστές Hilbert-Schmidt $\boxed{}$

Άσκηση III.7 $\quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ να δειχθεί ότι

$(\text{im}\, A)^\perp = \ker A^*$ || ίδια είναι!!

και ότι $\ker A = (A^*(\mathcal{K}))^\perp$

Απόδ. $\quad (A^*(\mathcal{K}))^\perp = \ker A \iff (\text{im}\, A^*)^{\perp\perp} = (\ker A)^\perp$

αν και μόνο αν

$$\overline{\text{im}\, A^*} \overset{(*)}{=} (\ker A)^\perp$$

Δείχνω την (*): $x \in \ker A \iff Ax = 0$

$\iff \langle Ax, y\rangle = 0 \quad \forall y \in K$

$\iff \langle x, A^* y\rangle = 0 \quad$ ''

$\iff x \perp \text{im}\, A^*$

$\iff x \perp \overline{(\text{im}\, A^*)}$

έδειξα ότι $\ker A = \overline{\text{im}\, A^*}^{\perp}$, άρα $(\ker A)^\perp = \overline{(\text{im}\, A^*)}$

Ισχυρ. $\quad \ker(A^*A) = \ker A$

Απόδ. $\quad$ Αν $x \in \ker A$ τότε $Ax = 0 \Rightarrow A^*Ax = 0$.

Αν $A^*Ax = 0$ τότε $\langle A^*Ax, x\rangle = 0$

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = 0$$

Ερώτηση: Ένα αληθεύει ότι $(\ker A)^\perp = \text{im}(A^*)$;

↑ ισχύει

ισχύει $\iff$ $\text{im}(A^*)$ κλειστός υπόχωρος

όχι $\quad$ τότε όχι, π.χ. $A = \text{diag}(\frac{1}{n})$ είναι φραγμένος

$\Downarrow$

$A^* = \text{diag}(\frac{1}{n})$ αυτοσυζυγής

αν $x = (\frac{1}{n}) \in \ell^2$ τότε $x \notin \text{im}(A^*)$

διότι αν $\exists y \in \ell^2$ με $x = A^*y$

θα έπρεπε $\frac{1}{n} = x(n) = (A^*y)(n) = \frac{1}{n} y(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

δηλ. $y(n) = 1$ $\forall n$ άτοπο

Άλλος τρόπος!

$\forall e_n = \frac{1}{n}(n e_n) \in \text{im}(A^*)$

οπότε $\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{im}(A^*)$: πυκνό στο ℓ^2

θα έπρεπε $\text{im}(A^*) = \ell^2$

πράγμα που δεν ισχύει. (γιατί;)