22/11/2018

$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ $\qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$

$P = P(\mathcal{H}_1)$

$\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2$

$Q = P(\mathcal{K}_1)$

$$T = TP + T(I-P)$$
$$= TP + TP^{\perp} \qquad P^{\perp} = I - P = P(\mathcal{H}_2)$$
$$T = QT + (I-Q)T$$
$$= QT + Q^{\perp}T \qquad Q^{\perp} = P(\mathcal{K}_2)$$

$$T = QTP + QTP^{\perp} + Q^{\perp}TP + Q^{\perp}TP^{\perp}$$

$$T_{11} = QTP\big|_{H_1} : H_1 \to \mathcal{K}_1$$

$$T_{12} : QTP^{\perp}\big|_{H_2} : H_2 \to \mathcal{K}_1$$

$$T_{21} = Q^{\perp}TP\big|_{H_1} : H_1 \to \mathcal{K}_2$$

$$T_{22} = Q^{\perp}TP^{\perp}\big|_{H_2} : H_2 \to \mathcal{K}_2$$

$$\begin{array}{c|cc} & \mathcal{H}_1 & \oplus\ \mathcal{H}_2 \\ \hline \begin{array}{c}\mathcal{K}_1 \\ \oplus \\ \mathcal{K}_2\end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}} \end{array} = T$$

αν $\mathcal{H}_2 = \ker T$ τότε $T_{12} = T_{22} = 0$

αν $\mathcal{K}_1 = \overline{\operatorname{im} T}$ τότε $T_{21} = 0$

Τότε : $T = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ όπου $T_{11} : (\ker T)^{\perp} \to \overline{\operatorname{im} T}$

$a = (a_n)$ μηδενική $\quad D_a : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$

$$e_n \longrightarrow a_n e_n$$

νδο συμπαγής

νδο $\overline{D_a(\hat{B}_{\ell^2})}$ συμπαγής

$$D_a(\hat{B}_{\ell^2}) = \{ (a_n x(n)) \quad \sum |x(n)|^2 \leq 1 \} \subseteq \ell^2$$

$X =$ είναι ολικά φραγμένο ως προς τη $\| \ \|_2$

$\forall \epsilon > 0$ να καλύψω το X από πεπερ. πλήθος μπάλες ακτίνας $< \epsilon$

Ξέρω ότι $a_n \longrightarrow 0$ $\quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n| < \epsilon$

$$\forall x \in \hat{B}_{\ell^2}, \quad D_a x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(n) e_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n x(n) e_n}_{y_x} + \underbrace{\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x(n) e_n}_{z_x}$$

$$y_x \perp z_x$$

και

$$\|z_x\|^2 = \sum_{n \geq n_0} |a_n x(n)|^2 \leq \epsilon \sum |x(n)|^2 \leq \epsilon \|x\|^2 \leq \epsilon$$

$y_x \in \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_{n_0-1}\}$: πεπερ. διάστασης

άρα $\exists$ πεπερ. πλήθος $\hat{B}_1 \ldots \hat{B}_m$ μπάλες ακτίνας $< \epsilon$ ώστε

$$y_x \in \bigcup_{k=1}^{m} \hat{B}_k \qquad \forall x \in \hat{B}_{\ell^2}$$

$$z_\epsilon \in \hat{B}(0, \epsilon) := \hat{B}_{m+1}$$

άρα $D_a(\hat{B}_{\ell^2}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{m+1} \hat{B}_k$ με ακτίνες $< \epsilon$

$$D_a \begin{bmatrix} a_1 & & & & \vdots & \\ & a_2 & & & \vdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & a_{n_0} & & \\ \hline & & & & a_{n_0+1} & \\ & 0 & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(n_0) \\ \hline \vdots \\ x(n) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

έχει $\| \quad \| < \epsilon$

$$D_{a_\epsilon} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & a_{n_0} & \vdots & \\ \hline 0 & & & 0 & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$ πεπερ. τάξης

$$\| D_a - D_{a_\epsilon} \| < \epsilon$$

$T, S : E \to F$ συμπαγή

νδο $T + \lambda S$ συμπαγής

Απόδ Έστω (x_n) φραγμ. ακολ. του E

(Tx_n) έχει συγκλ. υπακ: (Tx_{k_n})

αντίστοιχη την

(Sx_{k_n}) και αυτή έχει συγκλ. υπακ.

$$\Rightarrow \big((T+\lambda S)(x_{k_n})\big) = (Tx_{k_n}) + \lambda(Sx_{k_n})$$

συγκλίνει

έχει συγκλ. υπακ

$\Rightarrow$ η $\big((T+\lambda S)(x_{k_n})\big)_n$ έχει συγκλίνουσα υπακ.

$$M \xrightarrow[\text{φρ}]{B} E \xrightarrow[\text{συμπ}]{X} F \xrightarrow[\text{φρ}]{A} N$$

νδο $XB : M \to F$ συμπαγή

Απόδ αν $V \subseteq M$ φραγμ

$\Downarrow$ ← B φραγμ

$B(V) \subseteq E$ φραγμ

$\Downarrow$ ← X συμπ

$X(B(V)) \subseteq F$: ολικά φραγμ

$\Downarrow$

$XB : M \to F$ πάει φραγμ σε ολικά φραγμ, άρα είναι συμπ.

νδο $E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$ συμπαγής

Απόδ $U \subseteq E$ φραγμ $\Rightarrow$ $X(U) \subseteq F$ είναι σχετ. συμπαγές

δηλ $\overline{X(U)} \subseteq F$ συμπαγές

$\Downarrow$ A φραγμ, δηλ. συνεχής

$A(\overline{X(U)}) \subseteq N$ συμπαγές

$AX(U) = A(X(U)) \subseteq A(\overline{X(U)})$: συμπαγές

άρα $AX(U)$ είναι ολικά φραγμ. ∎

E, F : Banach

<u>Πρτ</u> $\mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{B}(E,F)$ είναι $\| \ \|$-κλειστός
(άρα χώρος Banach)

<u>Απόδ</u> Έστω (A_n) ακολ. με $A_n \in \mathcal{K}(E,F)$ $\forall n$
η οποία $\|A_n - A\| \to 0$, $A \in \mathcal{B}(E,F)$
νδο ότι A συμπαγής

Δώσε μου ένα $\epsilon > 0$
$\exists m : \forall n \geq m$, $\|A_n - A\| < \epsilon/2$

Τώρα, ο $A_m \in \mathcal{K}(E,F)$
άρα $A_m(\hat{B}_E)$ ολ φρ $\subseteq F$

άρα καλύπτεται από πεπερ. πλήθος $\epsilon/2$-μπάλες
<u>δηλ</u> $\exists x_1, x_2 \ldots x_N \in \hat{B}_E$

$$A_m(\hat{B}_E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(A_m x_k, \epsilon/2) \quad (\text{γιατί};)$$

δηλ: $\forall x \in \hat{B}_E$ $\exists k \in \{1 \ldots N\}$:
$\|A_m x - A_m x_k\| < \epsilon/2$

οπότε:

$$\|Ax - A_m x_k\| \leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m x - A_m x_k\|$$
$$\leq \|A - A_m\| \underbrace{\|x\|}_{\leq 1} + \epsilon/2$$
$$< \epsilon$$

<u>δηλ</u>

$$A(\hat{B}_E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} B(A_m x_k, \epsilon)$$

: A συμπαγής $\boxtimes$

Το όριο (A_n) ακολ. συγκλίνει στη $\| \ \|_{B(E,F)}$

Είναι συμπαγής

Αλλά το <u>ΚΣ</u> όριο όχι πάντα

<u>πχ</u> $E = F = \ell^2$, $\{e_n\}$ συνήθ. ο.κ. βάση

$\forall n$ ορίζω $P_n = P(\mathrm{span}\{e_1 \dots e_n\})$

$\in F(\ell^2) \subseteq K(\ell^2)$

$\forall x \in \ell^2$

ισχύει $P_n x \to x$

<u>δηλ</u> $P_n \to I$ κατά σημείο

I όχι συμπαγής

(<u>Απόδ</u>:

$\forall x \in \ell^2$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = \left(\sum_{k=1}^{n} e_k e_k^*\right)(x) \quad)$$

[Παρένθεση: Πόσο "μεγάλος" είναι ο χώρος $\mathcal{B}(E)$;

E: Banach. Θ. H-B: $\exists\, u^*: E \to \mathbb{C}$ γραμμ. τελεστ. να χωρίζουν τα σημεία του E

δηλ. $\forall x \in E \setminus \{0\}\ \exists\, u^* \in E^*: u^*(x) \neq 0$

$\exists$ τελεστές πεπερ. τάξης $v u^*$, $v \in E$, $u^* \in E^*$

$v u^*(x) = (u^*(x))v : E \to E$ μη μηδενικοί

$\mathcal{F}(E) \subseteq \mathcal{K}(E)$

Επίσης, όταν $\dim E = \infty$, $\lambda I \in \mathcal{B}(E)$, όχι συμπαγής, $\forall \lambda \neq 0$

$\forall$ χώρο Banach E: $\underbrace{\mathcal{K}(E) \oplus \mathbb{C} I}_{\text{συμπαγής διαταραχή του Id}} \subseteq \mathcal{B}(E)$

Υπάρχουν άλλοι; Όταν E: Hilbert, ΝΑΙ, πολλοί.

2011 Σ. ΑΡΓΥΡΟΣ, R. HAYDON: $\exists$ E χώρος Banach

ACTA MATH. ώστε $\mathcal{K}(E) \oplus \mathbb{C} I = \mathcal{B}(E)$

"λίγοι τελεστές"

$T \in B(H)$

- T συμπαγής $\Rightarrow$ $\forall (x_n)$ ο.κ. ακολουθία,
$$\langle Tx_n, x_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>Απόδ.</u> Έστω όχι: $\exists (x_n)$ ο.κ. ακολουθία $\exists\, \delta>0$:
: $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \geq 2\delta$ για άπειρους δείκτες n

άρα, $\exists$ ο.κ. ακολουθία (y_n) :
$$|\langle Ty_n, y_n\rangle| \geq 2\delta \quad \forall n$$

όμως, (y_n) φραγμ., T συμπ., άρα (Ty_n) έχει υπακ. (Ty_{k_n}) που συγκλίνει, $y := \lim_n Ty_{k_n}$

οπότε $\exists n_0$: $\forall n \geq n_0$
$$\|Ty_{k_n} - y\| < \delta$$

$$|\langle Ty_{k_n}, y_{k_n}\rangle - \langle y, y_{k_n}\rangle| = |\langle Ty_{k_n} - y, y_{k_n}\rangle|$$
$$\leq \|Ty_{k_n} - y\|\,\|y_{k_n}\| < \delta$$

$\Rightarrow$
$$\delta > |\langle Ty_{k_n}, y_{k_n}\rangle - \langle y, y_{k_n}\rangle| \geq |\langle Ty_{k_n}, y_{k_n}\rangle| - |\langle y, y_{k_n}\rangle|$$
$$\geq 2\delta - |\langle y, y_{k_n}\rangle|$$

$\Rightarrow$
$$|\langle y, y_{k_n}\rangle| > \delta \quad \underline{\forall n}$$

άτοπο, διότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, y_{k_n}\rangle|^2 \overset{\text{Bessel}}{\leq} \|y\|^2$

ΝΔΟ :

Αν T : $\forall$ ορθοκαν. (x_n), $\langle Tx_n, x_n\rangle \to 0$

τότε $\exists$ (F_n) από τελ. πεπ. τάξης : $\|T - F_n\| < \frac{1}{n}$ $\forall n$

<u>Απόδ.</u> Σταθεροποιώ ένα $n \in \mathbb{N}$

κάθε ορθοκανονικό A με $|\langle Ta, a\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall a \in A$

είναι πεπερασμένο (από την υπόθεση)

Θεωρώ A_0 μια τέτοια ορθοκανονική με το μεγαλύτερο δυνατό πλήθος στοιχείων

$A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ πεπερ.

Ονομάζω $M = \operatorname{span} A \subseteq H$ πεπερ. διάστατος υπόχωρος

<u>Ισχ.</u> $\forall u, v \in M^\perp$ και $\|u\|, \|v\| \leq 1$ τότε $|\langle Tu, v\rangle| < \frac{1}{n}$

<u>Απόδ.</u> πρώτα: $\forall u \in M^\perp$ με $\|u\| \leq 1$ αποδεικνύω $|\langle Tu, u\rangle| < \frac{1}{4n}$

και αλλιώς, παίρνοντας $x = \frac{u}{\|u\|} \in M^\perp$

θα ήταν $A_0 \cup \{x\}$ θα είχε μια ο.κ. ακολουθία με πιο πολλά στοιχεία από την A_0
$\exists$ με $|\langle Ty, y\rangle| \geq \frac{1}{4n}$ $\forall y \in A_0 \cup \{x\}$

άτοπο.

Τώρα: $\forall u, v \in M^\perp$, $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$

$$\langle Tu, v\rangle = \left\langle T\left(\frac{u+v}{2}\right), \frac{u+v}{2}\right\rangle - \left\langle T\left(\frac{u-v}{2}\right), \frac{u-v}{2}\right\rangle + i\left\langle T\left(\frac{u+iv}{2}\right), \frac{u+iv}{2}\right\rangle - i\left\langle T\left(\frac{u-iv}{2}\right), \frac{u-iv}{2}\right\rangle$$

$\frac{u + i^k v}{2} \in M^\perp$ και $\| \quad \| \leq 1$

άρα κάθε όρος $| \quad | < \frac{1}{4n}$

$$|\langle Tu, v\rangle| < 4 \cdot \frac{1}{4n}$$

Ονομάζω $P = P(M)$

$\forall x, y \in H$ με $\|x\|, \|y\| \le 1$

έχω $P^\perp x,\ P^\perp y \in M^\perp$, άρα

$$|\langle T P^\perp x, P^\perp y\rangle| < \frac{1}{n}$$

$$\iff |\langle (P^\perp T P^\perp) x, y\rangle| < \frac{1}{n} \quad \forall x, y \in \widehat{B}_H$$

$$\implies \|P^\perp T P^\perp\| \le \frac{1}{n}$$

$$T = \begin{array}{cc} M & M^\perp \\ \left[\begin{array}{cc} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{array}\right] & \end{array} \qquad T_{22} = P^\perp T P^\perp\big|_{M^\perp}$$

μικρή νόρμα

$$T = \underbrace{\left(PTP + PTP^\perp + P^\perp T P\right)}_{\substack{F_n \\ \text{πεπερ. τάξη}}} + P^\perp T P^\perp$$

$$T - F_n = P^\perp T P^\perp$$

$$\|T - F_n\| = \|P^\perp T P^\perp\| < \frac{1}{n} \qquad \blacksquare$$