20/11/2016

Προβολές

$$\mathcal{P}(H) = \{ P \in \mathcal{B}(H) \ : \ P = P^* = P^2 \}$$

$$\mathcal{P}(H) \longleftrightarrow \mathcal{S}(H) = \text{κλειστοί υπόχωροι}$$

$$P_M = P(M) \longleftarrow M$$

$$P \longrightarrow \operatorname{im} P$$

$$0 \longleftarrow \{0\}$$

$$I \longleftarrow H$$

$$I - P(M) \longleftarrow M^\perp = \{x \in H : x \perp M\}$$

$$\neq M^c = \{x \in H, x \notin M\}$$

$$\mathcal{P}(H) \subseteq \mathcal{B}_+(H)$$

$$\subseteq \{ T \in \mathcal{B}(H) \ : \ 0 \leq T \leq I \}$$

(αν $T \geq 0$ τότε $\langle Tx, x \rangle \leq \|T\| \|x\|^2 = \|T\| \langle x, x \rangle$

$\underline{\forall x}$

$$0 \leq \langle Tx, x \rangle \leq \langle \|T\| I x, x \rangle$$

όπως: ένας $T \geq 0$ έχει $\|T\| \leq 1$ ανν $T \leq I$)

Συμπεριφορά $M \longrightarrow P(M)$ ως προς διάταξη

<u>Πρόταση</u> M, N κλ. υπόχ. τότε

$$M \le N \iff P_M \le P_N$$

δηλ.

$$\forall x, \ \langle P_M x, x\rangle \le \langle P_N x, x\rangle$$

<u>Απόδ.</u> Θδο $P = P(M)$, $Q = P(N)$

$P \le Q \iff \forall x, \ \|Px\| \le \|Qx\|$

<u>Απόδ.</u> $P \le Q \overset{\text{ορ}}{\iff} \forall x, \ \langle Px, x\rangle \le \langle Qx, x\rangle$

$$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2, \qquad \langle Qx, x\rangle = \|Qx\|^2$$

(αφού $\langle Px, x\rangle = \langle PPx, x\rangle = \langle Px, P^* x\rangle = \langle Px, Px\rangle$)

• <u>Θδο</u> αν $\forall x, \ \|Px\| \le \|Qx\|$ τότε $\operatorname{im}P \subseteq \operatorname{im}Q$

✓ αν $x \in \operatorname{im}P$ τότε $x = Px$ άρα

$$\|x\| = \|Px\| \le \|Qx\| \le \|Q\| \|x\| \le \|x\|$$

άρα ισότητες (έχουμε δείξει πιο προηγουμένως)

$$\|x\| = \|Qx\| \Longrightarrow Qx = x$$

άρα $x \in \operatorname{im}Q$

• νδο $\operatorname{im}P \subseteq \operatorname{im}Q$ τότε $QP = P$

<u>Απόδ.</u> $\forall x \in H$ τότε $Px \in \operatorname{im}P \subseteq \operatorname{im}Q$

άρα $Q(Px) = Px$

$$\Downarrow$$

$$QP = P$$

• νδο αν $QP = P$ νδο $PQ = P$

$$(QP)^* = P^* = P$$

$$(QP)^* = P^* Q^* = PQ$$

• νδο αν $PQ = P$ τότε $P \le Q$ ($\iff \forall x \ \|Px\| \le \|Qx\|$)

$$\forall x \in H, \ \|Px\| = \|PQx\| \le \|P\| \|Qx\| \le \|Qx\|$$

∎

$P = P_M$, $\quad Q = P_N \qquad M, N$ κλ. υποχ. του H

Πρ. Η $R = PQ$ είναι προβολή $\iff PQ = QP$

Απόδ. Αν η R προβολή τότε $R = R^*$

οπότε $PQ = (PQ)^* = Q^* P^* = QP$

αντίστροφα, αν $PQ = QP$

τότε

$$R^* = (PQ)^* = Q^* P^* = QP \overset{(Y)}{=} PQ = R$$

και

$$R^2 = (PQ)(PQ) = P(QP)Q \overset{Y}{=} P(PQ)Q = P^2 Q^2 = PQ = R$$

οπότε $R = R^* = R^2$ άρα R προβολή

Πρ. τότε (αν $PQ = QP$) $\operatorname{im} R = M \cap N$

Απόδ.

Αν $x \in M \cap N$ τότε $Px = x \quad (x \in M)$

$Qx = x \quad (x \in N)$

$$\Downarrow$$

$$Rx = PQx = P(Qx) = Px = x$$

άρα $x \in \operatorname{im} R$.

αντίστροφα, αν $x \in \operatorname{im} R$ τότε (αφού R προβολή)

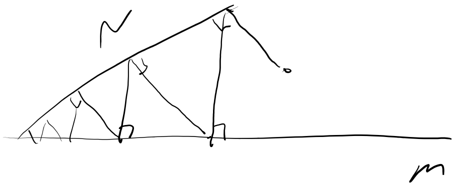
$\therefore \quad x = Rx = PQx = P(Qx) \in \operatorname{im} P$

$= QPx = Q(Px) \in \operatorname{im} Q$

$\Rightarrow x \in \operatorname{im} P \cap \operatorname{im} Q$

δηλαδή: $P(M \cap N) = P(M)P(N)$ αν $\boxed{P(M)P(N) = P(N)P(M)}$

$P(M \cap N) = ?$ Στη γενική περίπτωση διαισθητικά:



$\forall x \in \mathbb{R}^2$

$P(M \cap N)x \ (=0)$

$\shortparallel$

$\lim (PQPQPQ\cdots)x$

Πρτ. $M \perp N \iff P(M)P(N) = 0$

$(\iff P(N)P(M) = 0)$

$P = P_M$, $Q = P_N$

Απόδ. $M \perp N \Rightarrow \forall x \in H$ τότε $Qx \in N$ άρα $Qx \perp M$

δηλ. $Qx \in M^{\perp} = \ker P$ οπότε $P(Qx) = 0$ δηλ. $PQx = 0$.

$\Rightarrow PQ = 0$

αντίστροφα, αν $PQ = 0$

τότε $\forall x \in N$ τότε $x = Qx$

ενώ $Px = P(Qx) = PQx = 0$

$\Rightarrow x \in M^{\perp}$

οπότε $N \subseteq M^{\perp}$ δηλ. $N \perp M$

Πρόταση P, Q προβ. τότε $P+Q$ είναι προβολή

ανν $PQ = 0$

και $\operatorname{im}(P+Q) = P(H) + Q(H)$

Γενικότερα, έστω $P_1 \dots P_n$ ορθές προβολές (*)

(i) αν $P_i P_j = 0$ για $i \neq j$ ($\Leftrightarrow \operatorname{im} P_i \perp \operatorname{im} P_j$)

τότε $P_1 + \dots + P_n$ είναι προβολή

((*) παρατ. ότι $\forall P_i \geq 0$ έπεται $P_1 + \dots + P_n \geq 0$)

Απόδ. Θέτω $P = P_1 + \dots + P_n$ (οπότε $P = P^*$) νδο $P^2 = P$

για $n=2$: $(P_1+P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2$

$= P_1 + 0 + 0 + P_2 = P_1 + P_2$ κ.λπ.

Αντίστροφα, υποθέτω ότι η

$P = P_1 + \dots + P_n$ είναι προβολή

νδο P_k είναι $\perp$ ανά δύο

Έστω $x \in \operatorname{im}(P_k)$ για κάποιο $k = 1 \dots n$

οπότε $x = P_k x$ οπότε

$$\|x\|^2 = \|P_k x\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|P_i x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle P_i x, x \rangle$$

$$= \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right) x, x \right\rangle = \langle Px, x \rangle \leq \|Px\|\,\|x\| \leq \|x\|^2$$

διότι $\|P\| \leq 1$

οπότε ισότητα, δηλαδή:

$$\|P_k x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|P_i x\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|P_i x\|^2 = 0 \quad \forall i \neq k$$

άρα αν $x \in \operatorname{im} P_k$ τότε $\forall i \neq k$ $P_i x = 0$

δηλ. $x \perp \operatorname{im} P_i$

Έδειξα: $\operatorname{im} P_k \perp \operatorname{im} P_i$ $\forall i \neq k$.

Πόρισμα Έδειξα ότι αν $\sum_{k=1}^{n} P_k$ έχει $\| \quad \| \leq 1$

τότε οι P_k είναι $\perp$ ανά δύο

και το $\sum P_k$ είναι προβολή

οπότε $\|\sum P_k\| \leq 1$

Δηλ. αν $P_1 \dots P_N$ προβολές τότε

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} P_n \right\| \le 1 \iff \sum_{n=1}^{N} P_n \text{ προβολή} \iff P_n P_i = 0$$

για $i \neq n$.

Ισχ. $$\sum_{i=1}^{N} P(M_i) = P\left(\operatorname{span}_{1 \le i \le N}(M_i)\right)$$

(όταν $M_i \perp M_j$ για $i \neq j$)

Απόδ. ($N=2$) Έστω $P = P_1 + P_2$ με $P_1 P_2 = 0$

αν $x \in \operatorname{im} P$ τότε $x = Px = P_1 x + P_2 x \in \operatorname{im} P_1 + \operatorname{im} P_2$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \; M_1 + M_2$

αντίστροφα, αν $x \in M_1 + M_2$

τότε $x = y + z$ με $y \in M_1$, $z \in M_2$

οπότε $y = P_1 y$, $z = P_2 z$

και τότε

$$Px = Py + Pz = PP_1 y + PP_2 z$$

όμως $PP_1 = P_1$ διότι $PP_1 = (P_1 + P_2)P_1$
$= P_1^2 + P_2 P_1 = P_1$

όμοια $PP_2 = P_2$

άρα

$$Px = P_1 y + P_2 z = y + z = x$$

άρα $x \in \operatorname{im}(P_1 + P_2)$

(Η γενική περίπτωση είναι επαγωγή ...)

Παρατήρηση: Αν $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία προβολών, τότε οι P_n είναι κάθετες ανά δύο

ανν $$\sum_{n=1}^{N} P_n \le I \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

ανν $$\sum_{n=1}^{N} P_n \text{ είναι προβολή } \forall N \in \mathbb{N}.$$

Έστω $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθές προβολές κάθετες ανά δύο:

$P_n P_m = 0$ για $n \neq m$

$\forall N$, $\sum_{k=1}^{N} P_k$ είναι η προβολή στον

$M = M_1 + M_2 + \dots + M_N$

όπου $M_k = \operatorname{im} P_k$

επομένως, αν $\forall M_k \neq \{0\}$ $\forall k$

τότε

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} P_k \Big\| = 1 \quad \text{και επίσης}$$

$\forall$ n, m με $n > m$

$$\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} P_k \Big\| = 1$$

όπου αποκλείεται η $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ να συγκλίνει!

όμως,

Ισχύει $\forall x \in H$ η $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x$ συγκλίνει, και το όριο

$= Px$ όπου

$P = P\big(\overline{\operatorname{span}(M_n)}_{n \in \mathbb{N}}\big)$

θέτω

$K_N = M_1 + \dots + M_N$ = κλειστός $\forall N$ (διότι $M_k \perp M_n$ $\forall k \neq n$)

$(K_N) \nearrow$ αύξουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων

$\bigcup_{N=1}^{\infty} K_N$ είναι γραμμικός υπόχωρος (διότι $K_N \subseteq K_{N+1}$)

αλλά δεν είναι κλειστός

όπου οφείλω $M = \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} K_N} = \overline{\operatorname{span}(M_k)}_{k \in \mathbb{N}}$

Αποδ. Ισχυρισμού. Έστω $x \in H$

$\forall n$ ονομάζω $x_n = \sum_{k=1}^{n} P_k x = Q_n x$ όπου $Q_n = P(M_1 + \dots + M_n)$

$$\Rightarrow \|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} P_k x}_{\perp \text{ ανά δύο}}\| = \|Q_n x\| \leq \|x\|$$

οπότε $\forall n$
$$\sum_{k=1}^{n} \|P_k x\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=} \|\sum_{k=1}^{n} P_k x\|^2 \leq \|x\|^2$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x\|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$$
δηλ. η σειρά $\sum \|P_k x\|^2$ συγκλίνει.

οπότε, αν $n > m$ τότε
$$\|x_n - x_m\|^2 = \|\sum_{k=m+1}^{n} P_k x\|^2 \overset{\text{Πυθ}}{=}$$
$$= \sum_{k=m+1}^{n} \|P_k x\|^2$$

$\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0 : \forall n > m \geq n_0$
$$\|x_n - x_m\|^2 < \epsilon^2$$
οπότε $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ άρα (x_n) Cauchy

οπότε η
$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k x \quad \text{συγκλίνει (ΚΑΤΑ ΣΗΜΕΙΟ)}$$
(ως προς τη $\| \ \|$ του H)

έστω $y = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x$

ισχυρίζομαι ότι $y = Px$

όπου P η προβολή πάνω $\overline{\text{span}_k (M_k)} = M$

Πράγματι, $\forall n$ έχω $x_n = Q_n x = PQ_n x$ διότι $P \geq Q_n$

άρα $x_n \in M$ οπότε $y = \lim_n x_n \in M$

Επίσης, $\forall k \in \mathbb{N}$ έχω

$$P_k y = P_k \lim_n x_n = \lim_n P_k Q_n x = P_k x$$

διότι αν $n \geq k$ τότε $Q_n \geq P_k$ άρα $P_k Q_n = P_k$

Αλλά $P_k \leq P$ οπότε $P_k x = P_k P x$, άρα

$$P_k y = P_k P x$$

δηλ. $P_k (y - Px) = 0$

άρα $y - Px \perp \operatorname{im} P_k = M_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

και συνεπώς $y - Px \perp \overline{\operatorname{span}}\{M_k : k \in \mathbb{N}\} = M$

όμως $y \in M$, $Px \in M$ άρα $y - Px \in M$

άρα τελικά

$$y - Px = 0$$

και ο Ισχυρισμός αποδείχθηκε.

(Δείτε και το αρχείο orthproj.pdf)

__Πρτσ__ αν $P_1 \dots P_N$ $\perp$ ανα δύο δείξτε ότι

$P_1 + \dots + P_N = P$ = προβ στο άθροισμα

θέτω $P_0 = I - P$

έχω

$$P_0 + P_1 + \dots + P_N = I \qquad 0 \le P_k \le I$$

$\forall x$, $\|x\| = 1$ αν θέσω $p_k = \langle P_k x, x \rangle$

έχω $p_k \in [0,1]$ $\forall k = 1 \dots N$ και $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$

Πρτ. Αν (a_i) αύξουσα ακολουθία προβολών, ...

$$(\underline{\text{δηλ}} \quad \operatorname{im} a_n \subseteq \operatorname{im} a_{n+1}$$
$$\iff a_n a_{n+1} = a_n \quad \forall n)$$

τότε $\forall x \in H$ η $(a_n x)$ συγκλίνει, στο ax

όπου $a = P\left(\overline{\bigcup_n \operatorname{im} a_n}\right)$

Απόδ. Ονομάζω $M_n = \operatorname{im} a_n$ και $M = \overline{\bigcup_n M_n}$

$$a = P(M)$$

$\forall x \in H$, $ax \in \overline{\bigcup M_i}$

οπότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, i_0 : \exists\, x_{i_0} \in M_{i_0}$

ώστε $\|ax - x_{i_0}\| < \varepsilon$

όμως, $\forall i$, $a_i x = a_i a x$ διότι $a_i \leq a$.

επίσης $\forall i \geq i_0$ $a_i x_{i_0} = x_{i_0}$ διότι $x_{i_0} \in M_{i_0} \subseteq M_i$

οπότε $\forall i \geq i_0$:

$$\|a_i x - a x\| \leq \|a_i a x - a_i(x_{i_0})\| + \|a_i(x_{i_0}) - ax\|$$
$$= \|a_i(ax - x_{i_0})\| + \|x_{i_0} - ax\|$$
$$\leq \|ax - x_{i_0}\| + \|x_{i_0} - ax\| < 2\varepsilon$$

Άρα

$a_i x \to a x$ $\underline{\text{δεν}}$ ισχύει ότι $\|a_i - a\| \to 0$

διότι $a - a_i$ είναι

προβολή, οπότε αν

$a - a_i \neq 0$ τότε $\|a - a_i\| = 1$

Τελεστές πεπερ. τάξης :

Ορ $\quad uv^* : x \longrightarrow \langle x, v\rangle u$

$$\| uv^*(x) \| = |\langle x, v\rangle| \, \|u\|$$

$$\le \|x\| \, \|v\| \, \|u\|$$

$\Rightarrow$ uv^* φραγ και

$$\|uv^*\| \le \|v\| \, \|u\|$$

αν $v=0$, ισχύει. Αν $v \neq 0$ Θέτω $x = \frac{v}{\|v\|}$ και έχω

$$\left\| uv^*\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\| = \left|\left\langle \frac{v}{\|v\|}, v\right\rangle\right| \|u\|$$

$$= \|v\| \, \|u\|$$

άρα $\|uv^*\| = \|u\|\|v\|$ πάλι

Ισχ. αν $a = (a_n) \in c_0$ (δηλ.) $a_n \to 0$

τότε

$D_a = \operatorname{diag}(a_n)$ είναι συμπαγής

δηλ. το σύνολο:

$$\{(a_n x(n)) : \sum |x(n)|^2 \le 1\} \subseteq \ell^2$$

είναι σχετικά συμπαγές στον ℓ^2

(Απόδ. NEXT TIME!)

Παρ. $\hat{B}_{\ell_2} = \{(x(n)) : \sum |x(n)|^2 \le 1\}$ όχι σχετ. συμπαγής

διότι περιέχει $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

και $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ $\forall n \neq m$

οπότε η $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν έχει συγκλ. υπακ.