13 Νοε 2018

$T \in \mathcal{B}(H)$ αυτοσυζυγής δηλ. $T = T^*$ τότε
$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in B_H\}$$

<u>Απόδ.</u> $\forall x$, $|\langle Tx,x\rangle| \le \|Tx\|\,\|x\| \le \|T\|\,\|x\|^2$

$\Rightarrow$
$$\sup_{x\in B_H}\{|\langle Tx,x\rangle|\} \le \|T\|$$

$\geq$?

Θέτω $\hat\varphi(x) := \langle Tx,x\rangle$ <u>τότε</u>: $\hat\varphi(x)\in\mathbb{R}\ \forall x\in H$

$\Rightarrow$

(polarisation)
$$4\langle Tx,y\rangle = \underbrace{\hat\varphi(x+y)-\hat\varphi(x-y)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(\hat\varphi(x+iy)-\hat\varphi(x-iy))}_{\in\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$
$$4\,\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle = \hat\varphi(x+y)-\hat\varphi(x-y)$$

$\Downarrow$
$$4|\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle| \le |\hat\varphi(x+y)|+|\hat\varphi(x-y)|$$

(Θέτω: $\|\hat\varphi\| = \sup\{|\hat\varphi(x)| : x\in B_H\}$)
$$\le \|\hat\varphi\|\,\|x+y\|^2 + \|\hat\varphi\|\,\|x-y\|^2$$
$$= \|\hat\varphi\|(2\|x\|^2+2\|y\|^2) \quad //$$

Δηλ. όταν $x,y\in B_H$
$$|\mathrm{Re}\langle Tx,y\rangle| \le \|\hat\varphi\|$$

Γράφω:
$\langle Tx,y\rangle = \lambda|\langle Tx,y\rangle|$ όπου $\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Οπότε
$$|\langle Tx,y\rangle| = \bar\lambda\langle Tx,y\rangle = \langle Tx,\lambda y\rangle = \mathrm{Re}\langle Tx,\lambda y\rangle$$
$$\le \|\hat\varphi\|\cdot\|x\|\,\|\lambda y\| = \|\hat\varphi\| \quad \text{διότι } \|x\|\le 1,\ \|\lambda y\|\le 1$$

$$\sup\{|\langle Tx,y\rangle| : x,y\in B_H\} \le \|\hat\varphi\| \quad \square$$

$\forall A \in \mathcal{B}(H)$: πράξη : $A^* \in \mathcal{B}(H)$

$$A = \underbrace{\frac{A + A^*}{2}}_{} + i\,\underbrace{\frac{A - A^*}{2i}}_{}$$

αυτοσυζυγείς

$$\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}_h(H) + i\,\mathcal{B}_h(H)$$

μιγ. χώρος Banach

πραγμ. χώρος Banach : $A = A^*$ ⟹ $\lambda A \in \mathcal{B}_h$ για $\lambda \in \mathbb{R}$

κλειστός :

Αν $A_n \in \mathcal{B}_h(H)$ και $A_n \longrightarrow A$

$\Downarrow$ ($*$ ισομ.)

$A_n^* \longrightarrow A^*$

$A_n^* = A_n$ άρα $A = A^*$

Διαφορές : $\mathcal{B}(H)$ άλγεβρα $AB = A \circ B$

$\mathcal{B}_h(H)$ όχι αν $A, B \in \mathcal{B}_h(H) \not\Rightarrow AB \in \mathcal{B}_h(H)$

διότι $(AB)^* = B^* A^* = BA$

άρα

$AB \in \mathcal{B}_h(H)$ ανν $AB = BA$

$T \in B(H)$ θετικός : $\langle Tx, x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$

<u>Παράδ</u> $H = L^2(\mathbb{R})$, $f \in C_c(\mathbb{R})$

$M_f \geq 0 \iff f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(άσκ.)

[Αν $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ τότε $M_f \geq 0 \iff f(t) \geq 0$ σχεδόν $\forall t$]

<u>Παράδ</u> $H = \ell^2$ και $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$

τότε $D_a \geq 0 \iff a(n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

<u>Απόδ</u> $D_a \geq 0 \Rightarrow \langle D_a e_k, e_k\rangle \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$\langle D_a e_k, e_k\rangle = \langle a(k) e_k, e_k\rangle = a(k)$$

αντίστροφα αν $a(k) \geq 0 \quad \forall k$ τότε

$\forall x = (x(k)) \in \ell^2$:

$$\langle D_a x, x\rangle = \sum a(k)\, x(k) \overline{x(k)}$$

$$= \sum \underbrace{a(k)}_{\geq 0} |x(k)|^2 \geq 0$$

$\blacksquare$

Παρένθεση:

Όταν $H = \ell^2$ (ή L^2)

λέω $T \in B(H)$ διατηρεί την θετικότητα (positivity preserving)

αν $\forall x \in H$: $x \geq 0 \implies Tx \geq 0$

$\uparrow$

αν $x(n) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Παρ. Αν $T = M_a$ τότε διατηρεί θετικότητα $\Leftrightarrow \forall a(n) \geq 0$

$\Updownarrow$

θετικός $\Leftrightarrow$

Όμως στη γενική περίπτωση οι δύο έννοιες δεν συγκρίνονται

Πχ Στο $\mathbb{C}^2$, ο $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ διατηρεί θετικότητα

αλλά δεν είναι θετικός (δεν είναι καν $T = T^*$)

$S = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ είναι θετικός αλλά δεν διατηρεί θετικότητα

ΤΕΛΟΣ ΠΑΡΕΝΘΕΣΗΣ

Ισχ: $\forall\, T \in \mathcal{B}_h(H)$ $\exists$ (όχι μοναδικά) $A, B \in \mathcal{B}_+(H)$

ώστε $T = A - B$

(περ. $\forall x \in H$, αφού $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ μπορώ να βρω a_x, b_x

ώστε $\langle Tx, x\rangle = a_x - b_x$ $\quad a_x, b_x \geq 0$

υπάρχουν όμως τελεστές A, B ώστε $\langle Ax, x\rangle = a_x$

και $\langle Bx, x\rangle = b_x$, $\forall x \in H$;;)

ΝΑΙ!

Απόδ: $\forall \lambda \geq \|T\|$: $\forall x$, $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|T\| \langle x, x\rangle \leq \lambda \langle x, x\rangle$

$= \langle \lambda 1\!\!1_H x, x\rangle$

(επειδή $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$)

$\forall x \in H$ $\quad \langle (-\lambda 1\!\!1_H) x, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle \leq \langle (\lambda 1\!\!1_H) x, x\rangle$.

άρα: $\quad -\lambda 1\!\!1_H \leq T \leq \lambda 1\!\!1_H$

ειδικότερα:

$$-\|T\| 1\!\!1_H \leq T \leq \|T\| 1\!\!1_H$$

$$\Updownarrow$$

$$T + \|T\| 1\!\!1_H \geq 0 \quad \text{και} \quad \|T\| 1\!\!1_H - T \geq 0$$

άρα θετικοί

$$T = \left(\frac{T + \|T\| 1\!\!1_H}{2}\right) - \left(\frac{\|T\| 1\!\!1_H - T}{2}\right)$$

γενικότερα: $\quad T = \left(\frac{T + \lambda 1\!\!1_H}{2}\right) - \left(\frac{\lambda 1\!\!1_H - T}{2}\right)$ $\quad \forall \lambda \geq \|T\|$

παρ/σ $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρ.

$f = f_+ - f_-$ $\quad f_+, f_- \geq 0$

είναι "βέλτιστη" διασπ.

αν $f = g - h$ με $g, h \geq 0$

τότε $g \geq f_+$ και $h \geq f_-$. (άσκ.)

για τελεστές δεν πετύχαμε (προς το παρόν)

βέλτιστη διάσπαση $T = T_+ - T_-$

H, $\forall M$ κλειστός υποχ. ισχύει

$$H = M \oplus M_\perp$$

οπότε ορίζεται η ορθή προβολή.

$$P_M : H \to H$$

$$x = x_M + x_\perp \to x_M$$

• γραμμική, ταυτοδύναμη ($P_M \circ P_M = P_M$) και $\|P_M\| \le 1$

$\Downarrow$

$\|P_M\| = 1$ αν $M \neq \{0\}$

Προφ. $(I - P_M)x = x - x_M = x_\perp \quad \forall x$

άρα $I - P_M$ είναι η προβολή στο $M_\perp$

Προφ. $\forall x$ το $P_M x$ είναι το πλησιέστερο διάνυσμα προς το x του M

διότι $\forall y \in M$ ισχύει $y - P_M y = 0$ οπότε

$$\|x - P_M x\| = \|x - P_M x - (y - P_M(y))\|$$

$$= \|x - y - P_M(x - y)\| = \|\underbrace{(I - P_M)}(x - y)\| \le \|x - y\|$$

άρα $\|x - P_M x\| \le \inf\{\|x - y\| : y \in M\} = \mathrm{dist}(x, M)$

Προφ. $\operatorname{im} P_M = M$ και $\ker P_M = M^\perp$

υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ κλειστών γραμμ. υποχώρων και ορθών προβολών:

$$M \longrightarrow P_M$$

$$M^\perp \longrightarrow I - P_M$$

$$\{0\} \longrightarrow 0$$

$$H \longrightarrow I_H$$

Πρόταση H: Hilbert, $P : H \to H$ γραμμική + $P \circ P = P$

ΤΕΕΙ

(α) $\exists\, M$ κλ. υπόχ. ώστε $P = P_M$.

(β) $\ker P \perp \operatorname{im} P$

(γ) $\|P\| \leq 1$.

Απόδ (α) $\Rightarrow$ (β) διότι $\operatorname{im} P = M$, $\ker P = M^\perp$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) $\forall x \in H$,

$$x = \underset{\operatorname{im} P}{\underset{\uparrow}{Px}} + \underbrace{(I-P)x}_{\in \ker P \text{ γιατί: } P(I-P)x = Px - P^2x = Px - Px = 0}$$

$\Downarrow$

είναι $\perp$

(Πυθ) $\Rightarrow$ $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|(I-P)x\|^2 \geq \|Px\|^2$

άρα $\forall x$, $\|Px\| \leq \|x\|$ άρα $\|P\| \leq 1$

(γ) $\Rightarrow$ (α) Υποθέτω ότι $P = P^2$ και $\|P\| \leq 1$

Θέτω $M = \operatorname{im} P$ νδο $P = P_M$

αρκεί νδο $(\ker P) = M^\perp$ δηλ $(\ker P)^\perp = M$

Έστω $x \in (\ker P)^\perp$ άρα $(I-P)x \in \ker P$ άρα $x \perp (I-P)x$

Πυθ

$$0 \leq \|x\|^2 + \|(I-P)x\|^2 = \|x - (I-P)x\|^2 = \|Px\|^2 \underset{(\gamma)}{\leq} \|x\|^2$$

$\Downarrow$

$\|(I-P)x\|^2 = 0 \Rightarrow (I-P)x = 0$

άρα $x = Px \in M$

Έδειξα ότι $(\ker P)^\perp \subseteq M$.

Έστω $\neq$. Τότε $\exists\, y \in M \setminus \{0\}$, $y \perp (\ker P)^\perp$

δηλ $y \in (\ker P)^{\perp\perp} = \ker P$

οπότε $y \in M = \operatorname{im} P$ και $y \in \ker P$

άρα $y \perp y$ άρα $y = 0$ άτοπο.

Γιατί ο $\operatorname{im} P$ είναι κλειστός;

Διότι, $x \in \operatorname{im} P \iff \exists\, y : x = Py$

$\Downarrow$

$Px = P^2y = Py = x$

$\iff x = Px$

$\iff x - Px = 0$

$\iff x \in \ker(I-P)$

άρα $\operatorname{im} P = \ker(I-P) =$ κλειστό διότι $I-P$ συνεχής

Έστω $P \in \mathcal{B}(H)$, $P = P^2 \neq 0$

P ορθή προβολή $\Longrightarrow$ $P \geq 0$

Απόδ νδο $\langle Px, x\rangle \geq 0$ $\quad \forall x \in H$:

$(I - P)x \in \ker P$ άρα

$(I-P)x \perp Px$

$\langle Px, (I-P)x\rangle = 0$

άρα

$\langle Px, x\rangle - \langle Px, Px\rangle = 0 \Longrightarrow \boxed{\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \geq 0}$

• P θετική $\Longrightarrow$ P αυτοσυζυγής $\Longrightarrow$ P φυσιολογικός

νδο

P φυσιολ $\Longrightarrow$ P ορθή προβολή

αρκεί νδο $\boxed{\operatorname{Im} P \perp \ker P}$

Έστω $x \in \ker P$, $y \in \operatorname{Im} P$ οπότε $y = Py$

$\langle x, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle P^* x, y\rangle = 0$ γιατί;

διότι:

έχουμε δείξει για φυσιολογικούς

$x \in \ker P$: $Px = 0 \Longrightarrow \|P^* x\| = \|Px\| = 0$

$\Longrightarrow x \in \ker P^*$

άρα $P^* x = 0$ και γι' αυτό

$\langle P^* x, y\rangle = 0$

P ορθή προβ., y : $\|Py\| = \|y\|$

τότε $Py = y$

αν $(I - P)y = 0$

<u>Απόδ.</u> Κοιτάω τα:

Py, $(I-P)y$

$\uparrow$ $\uparrow$ άρα είναι $\perp$

$\operatorname{im} P$ $\ker P$

$$\|y\|^2 = \|Py\|^2 + \|(I-P)y\|^2$$

όμως $\|y\|^2 \underset{(\text{υπόθ.})}{=} \|Py\|^2$ άρα $\|(I-P)y\|^2 = 0$

οπότε $(I-P)y = 0$

δηλαδή $Py = y$